Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2016
10. Übungsblatt 15./17. Juni 2016

Aufgabe P27:

Ein Teilchen bewege sich in einer Ebene vom Ursprung zum Punkt $(1,1)$ eines kartesischen Koordinatensystems. Dabei durchlaufe es ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = f_0 \begin{pmatrix} 3xy \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Wegintegrals die an dem Teilchen geleistete Arbeit

$$W_{\mathscr{C}} = \int_{\mathscr{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

für die folgenden Wege $\mathscr{C}$:

i) geradlinige Verbindung von (0,0) nach (1,1).

ii) geradlinige Verbindung von (0,0) nach (1,0) und dann von (1,0) nach (1,1).

iii) entlang der Parabel $y = x^2$.

b) Die Länge des Weges $\mathscr{C}$ ist durch das folgende Wegintegral gegeben

$$L_{\mathscr{C}} = \int_{\mathscr{C}} ds \equiv \int_{\mathscr{C}} |d\vec{r}|.$$

Sei $\vec{r}(\alpha)$, $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, eine Parametrisierung von $\mathscr{C}$. Geben Sie $L_{\mathscr{C}}$ in Form eines Integrals über den Parameter α an. Wie lässt sich diesse Formel physikalisch interpretieren, wenn man den Weg nach der Zeit parametrisiert?

c) Berechnen Sie die Längen der drei in Aufgabe a) beschriebenen Wege.
Hinweis: $\int dx \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}))$

Aufgabe H27: (6 Punkte)

a) In der Vorlesung wurde die folgende Formel für den Laplace-Operator in orthogonalen krummlinigen Koordinatensystemen gegeben

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_i \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i^2}\frac{\partial}{\partial u_i}\phi\right).$$

Leiten Sie damit die Formel für $\Delta\phi$ in Zylinderkoordinaten her.

b) Sei $\phi(\vec{r}) = r^2$. Berechnen Sie $\Delta\phi$ in kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten.

Aufgabe H28: (2 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich in der xy-Ebene entlang einer Kreisbahn mit Radius R, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, durch ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = f_0\vec{r} \times \vec{e}_z$. Welche Arbeit wird an dem Teilchen pro Umlauf geleistet?

Aufgabe H29: (3 Punkte)

Ein Kraftfeld sei in Zylinderkoordinaten durch die Funktion

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\beta}{\sqrt{\rho}}\vec{e}_\varphi$$

gegeben. Ein Teilchen bewege sich in der xy-Ebenen entlang der Spiralbahn

$$\rho(\varphi) = \rho_0 e^{-\lambda\varphi}, \quad \rho_0, \lambda > 0 = \text{const.}, \quad \varphi \in [0, \infty].$$

Berechnen Sie dei Arbeit $W(\varphi_1)$, die das Kraftfeld an dem Teiclhen auf dem Weg von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_1$ verrichtet. Welche Strecke $L(\varphi_1)$ legt das Teilchen dabei zurück? Bilden Sie den Grenzwert $\varphi_1 \to \infty$ und zeigen Sie, dass sowohl $W(\infty)$ als auch $L(\infty)$ endlich bleiben.

Aufgabe H30: (3 Punkte)

Wegintegrale zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 hängen im Allgemeinen vom Verlauf des Weges ab. Dagegen sollten sie nicht von der speziellen Wahl der Parametrisierung dieses Weges abhängen.
Seien $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ und $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ zwei Parameter, zwischen denen eine bijektive (eineindeutige) Abbildung $\alpha = \alpha(\beta)$ existiert. Insbesondere seien $\alpha(\beta_1) = \alpha_1$ und $\alpha(\beta_2) = \alpha_2$. Ferner seien $\vec{r}_\alpha(\alpha)$ und $\vec{r}_\beta(\beta)$ zwei unterschiedliche Parametrisierungen des gleichen Weges $\mathscr{C}$, d.h. $\vec{r}_\alpha(\alpha(\beta)) = \vec{r}_\beta(\beta)$. $\vec{V}(\vec{r})$ sei ein Vektorfeld.
Geben Sie das Wegintegral $\int_{\mathscr{C}} d\vec{r} \cdot \vec{V}(\vec{r})$ für die beiden Parametrisierungen an und zeigen Sie mit Hilfe der Substitutionsregel, dass die Ergebnisse identisch sind.