Quantentheorie und Statistische Physik für LaG

Prof. Dr. J. Wambach

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014

6. Übungsblatt 25. Juni 2014

Aufgabe P11: Zeitentwicklungsoperator

In der Vorlesung haben Sie unitäre Operatoren kennengelernt. Einer der Wichtigsten ist der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t,t_0)$, der angibt wie sich Zustände mit der Zeit ändern

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle.$$

Der Zustand soll zur Zeit t die Schrödingergleichung erfüllen, wenn er es zum Zeitpunkt t_0 getan hat und wir können schreiben

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle = \hat{H}\hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle.$$

Da die Zustände nun nicht mehr von der Zeit abhängen ($t_0 = \text{const.}$), können wir daraus die Operatorgleichung für den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t,t_0)$ ablesen

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t) = \hat{H}\hat{U}(t).$$

Im Spezialfall eines zeitunabhängigen Hamiltonoperators $\hat{H}$ wird die Gleichung gelöst durch

$$\hat{U}(t,t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right).$$

Wenn die Anfangszeit $t_0 = 0$ ist schreibt man häufig auch $\hat{U}(t,0) \equiv \hat{U}(t)$.

a) Zeigen Sie, dass der Zeitentwicklungsoperator unitär sein muss, wenn die Norm erhalten werden soll

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle = 1.$$

b) Wir betrachten das Zwei-Zustands System aus Aufgabe H11 des letzten Übungsblatts. Hier sei das System zur Zeit $t_0 = 0$ im Zustand $|1\rangle$ präpariert. Wir wollen die Zeit berechnen zu der das System in Zustand $|2\rangle$ sein wird. Drücken Sie dazu zunächst die Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ in der Basis der Eigenzustände $|\psi_+\rangle$ und $|\psi_-\rangle$ aus. Zur Erinnerung

$$|\psi_\pm\rangle = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + (E_\pm - h_1)^2}}|1\rangle + \frac{E_\pm - h_1}{\sqrt{\Delta^2 + (E_\pm - h_1)^2}}|2\rangle,$$

wobei $E_\pm$ die Eigenwerte des Hamiltonoperators sind.

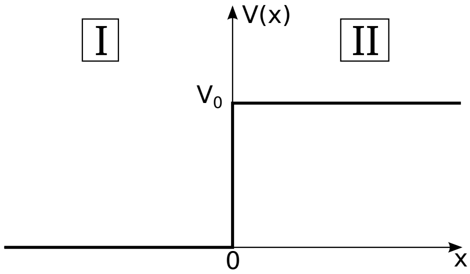
c) Berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit, dass das System vom Zustand $|1\rangle$ nach einer Zeit t im Zustand $|2\rangle$ vorliegt. Starten Sie mit der Anwendung von $\hat{U}(t)$ auf $|1\rangle$, dann berechnen Sie das Skalarprodukt daraus mit Zustand $|2\rangle$ und quadrieren Sie dieses. Setzen Sie dann die Eigenwerte

$$E_\pm = \frac{h_1 + h_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(h_1 - h_2)^2}{4} + \Delta^2}$$

ein und vereinfachen Sie.

d) Bestimmen Sie die Zeit, zu der das System sicher in Zustand $|2\rangle$ ist. Kann das System danach wieder in Zustand $|1\rangle$ gemessen werden?

Aufgabe H13: Potentialstufe



Wir betrachten eine von links einlaufende ebene Welle, die auf die Potentialstufe

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ V_0 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

trifft.

a) Stellen Sie Ansätze für die Wellenfunktionen im Bereich I und II auf. Machen Sie die Fallunterscheidung für Energien $E > V_0$ und Energien $E \leq V_0$.

b) Bestimmen Sie die Unbekannten in den Gleichungen aus a) für beide Fälle aus den Stetigkeitsbedingungen. Dabei können Sie davon ausgehen, dass die einlaufende Welle normiert ist, also die Amplitude 1 hat.

c) Berechnen Sie die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten für $E > V_0$.

d) Wie groß ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Ort $x_0 > 0$ im Fall $E \leq V_0$?

Aufgabe H14: Heisenberg-Bild

In der Gruppenübung haben wir zeitabhängige Zustände betrachtet. In diesem Bild, dem *Schrödinger-Bild* sind die Zustände zeitabhängig, die Operatoren jedoch höchstens explizit zeitabhängig. Für einen Operator im Schrödingerbild $\hat{A}_S$, gilt also

$$\frac{d\hat{A}_S}{dt} = \frac{\partial \hat{A}_S}{\partial t}.$$

Wir können aber auch die Zustände zeitunabhängig annehmen und zeitabhängige Operatoren betrachten. Dies nennt man das *Heisenberg-Bild*. Aus den Erwartungswerten von Operatoren ergibt sich

$$\langle \psi(t)|\hat{A}_S|\psi(t)\rangle = \langle \psi(0)|\hat{U}^\dagger(t)\hat{A}_S\hat{U}(t)|\psi(0)\rangle = \langle \psi(0)|\hat{A}_H(t)|\psi(0)\rangle,$$

mit dem Operator im Heisenberg-Bild $\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t)\hat{A}_S\hat{U}(t)$.

a) Zeigen Sie, die Heisenbergschen Bewegungsgleichung

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}_H(t), \hat{H}]_- + \hat{U}^\dagger(t)\frac{\partial \hat{A}_S}{\partial t}\hat{U}(t).$$

Starten Sie dazu von der linken Seite. Schreiben Sie $\hat{A}_H(t)$ im Schrödinger-Bild und führen Sie die Ableitung des Zeitentwicklungoperators explizit für einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator aus.

b) Berechnen Sie im Heisenberg-Bild die Kommutatorrelationen

$$\text{i)} \quad [\hat{x}_H(t), \hat{p}_H(t)]_-, \qquad \text{ii)} \quad [\hat{x}_H(t), \hat{x}_H(t)]_-, \qquad \text{iii)} \quad [\hat{p}_H(t), \hat{p}_H(t)]_-.$$

c) Wir betrachten ein freies Teilchen der Masse m

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}.$$

Stellen Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für $\hat{x}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$ auf.
Hinweis: Verwenden Sie

$$[\hat{x}, \hat{p}^2]_- = \hat{p}[\hat{x}, \hat{p}]_- + [\hat{x}, \hat{p}]_-\hat{p}.$$

d) Bestimmen Sie $\hat{x}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$ durch integrieren der Bewegungsgleichungen. Verwenden Sie dabei die Randbedingungen

$$\hat{x}_H(t=0) = \hat{x}, \qquad \hat{p}_H(t=0) = \hat{p}$$

und starten sie mit der Gleichung für $\hat{p}_H(t)$ und setzen Sie das Egebnis in die Gleichung für $\hat{x}_H(t)$.

e) Berechnen Sie für das freie Teilchen die Kommutatoren

$$\text{i)} \quad [\hat{x}_H(t_1), \hat{x}_H(t_2)]_-, \qquad \text{ii)} \quad [\hat{p}_H(t_1), \hat{p}_H(t_2)]_-, \qquad \text{iii)} \quad [\hat{x}_H(t_1), \hat{p}_H(t_2)]_-.$$