Quantentheorie und Statistische Physik für LaG

Prof. Dr. J. Wambach

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014

5. Übungsblatt — 11. Juni 2014

Aufgabe P9: Skalarprodukt und Norm von Zuständen

Berechnen Sie die Norm und Skalarprodukte der Zustände

$$|\psi_1\rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_a^{a+\pi} dp\, \cos(p)\, |v_p\rangle \quad \text{und} \quad |\psi_2\rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_a^{a+\pi} dp\, \sin(p)\, |v_p\rangle,$$

wobei $|v_p\rangle$ ein orthonormierter uneigentlicher Dirac-Vektor sei.

Aufgabe P10: Lineare Operatoren, Darstellungen und Zustände

a) Zeigen Sie im Ortsraum, dass sowohl der Ortsoperator $\hat{\vec{x}}$ als auch der Impulsoperator $\hat{\vec{p}}$ lineare Operatoren sind.

b) Zeigen Sie im Ortsraum, dass $\hat{\vec{x}}$ und $\hat{\vec{p}}$ auch hermitische Operatoren sind, d.h. dass

$$\left\langle \psi | \hat{\vec{x}} \phi \right\rangle = \left\langle \hat{\vec{x}} \psi | \phi \right\rangle \quad \text{bzw.} \quad \left\langle \psi | \hat{\vec{p}}\, \phi \right\rangle = \left\langle \hat{\vec{p}}\, \psi | \phi \right\rangle \quad \forall \text{ Zustände } |\psi\rangle, |\phi\rangle$$

gilt. Führen Sie dazu im Fall von $\hat{\vec{p}}$ eine partielle Integration durch und argumentieren Sie warum einer der beiden Terme verschwindet.

c) Zeigen Sie, dass auch der Hamilton-Operator

$$\hat{H} \equiv \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{\vec{x}})$$

ein linearer, hermitischer Operator ist, wenn sich das Potential durch eine Potenzreihe der Form $\hat{V}(\hat{\vec{x}}) = \sum_n v_n \hat{\vec{x}}^n$ ausdrücken lässt.

d) Sei nun der Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ durch $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dargestellt. Der Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ sei aufgespannt durch ein abzählbares VON-System $|\phi_n\rangle$, $n = 0, 1$ mit

$$\left|\phi_0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \left|\phi_1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Drücken Sie den Zustand $|\psi\rangle$ durch die Basiszustände $|\phi_n\rangle$ als

$$\left|\psi\right\rangle = \sum_n c_n \left|\phi_n\right\rangle, \; c_n \in \mathbb{C}$$

aus; bestimmen Sie dazu die Koeffizienten c_n.

Aufgabe H10: Lineare Operatoren und Hilbert-Raum

Gegeben sei ein zweidimensionaler Hilbert-Raum mit einer VON-Basis $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$. Für den Operator A gelte:

$$\hat{A}|\varphi_1\rangle = -|\varphi_2\rangle, \quad \hat{A}|\varphi_2\rangle = -|\varphi_1\rangle.$$

a) Zeigen Sie, dass sich der Operator $\hat{A}$ als

$$\hat{A} = -|\varphi_2\rangle\langle\varphi_1| - |\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|$$

schreiben lässt.

b) Ist $\hat{A}$ hermitisch?

c) Berechnen Sie $\hat{A}\hat{A}^\dagger$, $\hat{A}^\dagger\hat{A}$ und $\hat{A}^2$.

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von $\hat{A}$.

Aufgabe H11: System mit zwei Zuständen

Ein System mit zwei Niveaus, $|i\rangle$ mit $i = 1, 2$ sei durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{2} h_i |i\rangle\langle i| + \Delta\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$$

gegeben, wobei h_i und Δ reelle Zahlen sind und es gilt $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$.

a) Berechnen Sie das Energiespektrum des Systems.
Hinweis: Da $|1\rangle$ und $|2\rangle$ eine VON-Basis bilden, lässt sich jeder Zustand $|\psi\rangle$ als

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

darstellen. Stellt man daraus den Hamilton-Operator als Matrix dar, dann erhält man die Eigenenergie durch Diagonalisierung.

b) Berechnen Sie die Eigenzustände des Systems.

Aufgabe H12: Basiswechsel und Darstellungen

Die Zustände $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$ bilden eine orthonormierte Basis eines Hilbertraums. Die Dimension des Hilbertraums sei $d = 2$. Eine andere orthonormierte Basis $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ sei durch

$$|b_1\rangle = \mathcal{N}\left(|a_1\rangle + i|a_2\rangle\right), \quad \text{und} \quad |b_2\rangle = \mathcal{N}\left(|a_1\rangle - i|a_2\rangle\right)$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Normierung $\mathcal{N}$ der Zustände $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$.

b) Der Übergang von der a-Darstellung in die b-Darstellung wird durch einen unitären Operator $\hat{U}$ vermittelt. Drücken Sie $\hat{U}$ durch $|a_i\rangle$ und $|b_j\rangle$ mit $i, j = 1, 2$ aus.

c) Wie sieht die zu $\hat{U}$ gehörige Matrix in der a-Darstellung aus?

d) Der Zustand $|\psi\rangle$ sei in der Darstellung bezüglich der Basis $\{|a_i\rangle\}$ durch

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wie sieht er in der b-Darstellung aus?

e) Der Operator A sieht in der a-Darstellung

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

aus. Wie lautet er bezüglich der b-Darstellung?