Quantentheorie und Statistische Physik für LaG

Prof. Dr. J. Wambach

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014

3. Übungsblatt 14. Mai 2014

Aufgabe P5: Fourier-Transformation

Unter einer (eindimensionalen) Fouriertransformation der (quadrat-integrablen) Funktion $f(x)$ versteht man das Integral

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p x\right),$$

welches es erlaubt die Funktion $\tilde{f}(p)$ in den Basisfunktionen $\exp(-ipx)$ mit Koeffizienten $f(x)$ zu entwickeln.
Die so genannte inverse Fourier-Transformation stellt die Umkehrtransformation zur Fourier-Transformation dar und ist durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \tilde{f}(p) \exp\left(+\frac{i}{\hbar} p x\right)$$

definiert.

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformation der Diracschen Delta-Funktion $f(x) = \delta(x - x')$.

b) Überprüfen Sie durch Einsetzen Ihres Ergebnisses in die obige Definition der inversen Fourier-Transformation und Vergleichen mit der Ursprungsfunktion, dass

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \exp\left(\frac{i}{\hbar} p (x - x')\right)$$

eine mögliche Fourier-(Integral)darstellung der Delta-Funktion ist.

c) Zeigen Sie explizit, dass die Fourier-Transformierte einer Gauss-Funktion der Form $f(x) = \exp(-x^2/(2\sigma^2))/\sigma,\ \sigma > 0$ wieder eine Gauss-Funktion ist.
Tipp: Nutzen Sie quadratische Ergänzung.

d) Wie lautet die Fourier-Transformation der (quadrat-integrablen) Funktion $f(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f_0(x)$, falls $f_0(x)$ im Unendlichen verschwindende Funktionswerte hat?

Aufgabe P6: Kontinuitätsgleichung und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Beweisen Sie mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung, dass die Wahrscheinlichkeit $P(t) = \int d^3x \left|\psi(\vec{x}, t)\right|^2$ ein stabiles Teilchen irgendwo im Raum zu finden, zeitlich konstant ist, d.h.

$$\frac{d}{dt} P(t) = 0.$$

Nehmen Sie dazu an, dass die Komponenten der Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{j}(\vec{x}, t)$ jeweils im Unendlichen $x_i = \pm\infty$ verschwinden.

Aufgabe H6: Schrödingergleichung im Impulsraum

Wir wollen untersuchen, wie die eindimensionale Schrödingergleichung im Impulsraum lautet, falls die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ eines Teilchens mit Masse m im Ortsraum der Schrödingergleichung

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H\right)\psi(x,t)=0$$

mit Hamilton-Operator im Ortsraum $H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)$ genügt. Dazu muss die gesamte Gleichung fourier-transformiert werden, um diese ausgehend vom Orts- im Impulsraum formulieren zu können. Nehmen Sie dazu an, dass $\psi(x,t)$ und $V(x)$ durch die inverse Fourier-Transformation als

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp\,\overline{\psi}(p,t)\exp\left(+\frac{i}{\hbar}px\right)\quad\text{und}\quad V(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp\,V(p)\exp\left(+\frac{i}{\hbar}px\right)$$

ausgedrückt werden können.

a) Setzen Sie die inverse Fourier-Transformierte von $\psi(x,t)$ und $V(x)$ in die Schrödingergleichung im Ortsraum ein.

Hinweis: Beachten Sie, dass beim Einsetzen der inversen Fourier-Transformierten die Integrationsvariablen der beiden Größen unterschiedlich sind. So muss z. B. beim Term $V(x)\psi(x,t)$ über unterschiedliche p's integriert werden!

b) Multiplizieren Sie nun beide Seiten dieser Gleichung mit $\exp(-\frac{i}{\hbar}\tilde{p}x)$ und führen Sie eine Integration $\int dx$ über den gesamten Ort aus und vereinfachen Sie!

Tipp: Nutzen Sie an geeigneter Stelle eine mögliche Fourier-(Integral)darstellung der Diracschen Delta-Funktion $\delta(p-p')$!

c) Zeigen Sie explizit, dass sich der für verschwindendes Potential $V(p)\equiv 0$ ergebende Ausdruck als

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\tilde{p}^2}{2m}\right)\overline{\psi}(\tilde{p},t)=0$$

schreiben lässt. Dies ist die Schrödingergleichung im Impulsraum für ein freies Teilchen mit Masse m und Hamilton-Operator im Impulsraum $H_0=\tilde{p}^2/(2m)$. Allgemein erhält man für nicht-verschwindendes Potential $V(p)$ kompliziertere Terme für den Potentialteil des Hamilton-Operators, wobei die Struktur der Schrödingerglei-chung aber die Gleiche bleibt.

Aufgabe H7: Schrödingergleichung für ein eindimensionales Teilchen

Ein eindimensionales Teilchen der Masse m sei durch die Wellenfunktion

$$\psi(x,t)=A\exp\left(-b\left(\left(\frac{mx^2}{\hbar}\right)+it\right)\right)$$

gegeben, wobei A und b positive reelle Konstanten seien.

a) Bestimmen Sie A aus der Normierungsbedingung der Wellenfunktion.

b) Für welches Potential $V(x)$ löst die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ die Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)?$$

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x\rangle$ und $\langle x^2\rangle$. Sind diese von der Zeit abhängig?

Hinweis: Benutzen Sie zum Lösen der auftretenden Integrale partielle Integration!

d) Berechnen Sie Δx. Wie lautet konkret der Ausdruck $(\Delta x)^2(\Delta p)^2$ für dieses System, falls $\langle p^2\rangle=m\hbar b$ und $\langle p\rangle=0$ gilt?