Quantentheorie und Statistische Physik für LaG

Prof. Dr. J. Wambach

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014

2. Übungsblatt — 30. April 2014

Aufgabe P3: Plancksche Strahlungsformel

Die Plancksche Strahlungsformel war einer der wichtigsten Durchbrüche in der Quantentheorie. Sie zeigte eine konsistente Beschreibung eines zuvor unverstandenen Problems und war experimentell überprüfbar. Damit führte sie zur Anerkennung der Energiequantelung und der zentralen Rolle des Planckschen Wirkungsquantums in der Physik.
Wir wollen die Plancksche Strahlungsformel genauer untersuchen und die Herleitung und die Grenzfälle großer und kleiner Frequenzen verstehen.

a) Berechnen Sie dazu die logarithmischen Ableitungen

$$\text{i)}\quad \frac{d}{dx}\ln\big(f(x)\big)\,, \qquad \text{ii)}\quad \frac{d}{dx}\ln\big(f(x)+g(x)+h(x)\big)\,.$$

b) Wir wollen Formel (1.2.21) aus dem Skript ausführlicher betrachten. Mit den Ergebnissen aus a) können wir nun die rechte Seite der Formel explizit berechnen und überprüfen, dass sie mit der linken Seite übereinstimmt

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon_0 \exp(-\beta n\epsilon_0)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta n\epsilon_0)} = -\frac{d}{d\beta}\ln\left[\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-\beta n\epsilon_0)\right].$$

c) Die spektrale Energiedichte ist wie in Formel (1.2.26) im Skript gegeben

$$w_\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^3\frac{h}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)-1}.$$

Diskutieren Sie die Formel in den Näherungen für große ($h\nu \gg k_B T$) und kleine Frequenzen ($h\nu \ll k_B T$) und zeigen Sie, dass diese Spezialfälle mit der Wien-Formel und der Rayleigh-Jeans-Formel übereinstimmt.
Hinweis: Verwenden Sie die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

d) In der im Skript angegebenen Form kann man mit der Planckschen Formel die spektrale Energiedichte berechnen. Daraus kann man die Leistung eines schwarzen Strahlers bestimmen. Berechnen Sie dazu zunächst die Intensität $I_\nu = cw_\nu/4\pi$ und geben Sie die Leistung $P(A,T)$ als Funktion der Fläche A und der Temperatur T an. Sie können davon ausgehen, dass sich das Integral über Winkel und Fläche zu πA ergibt.
Hinweis:

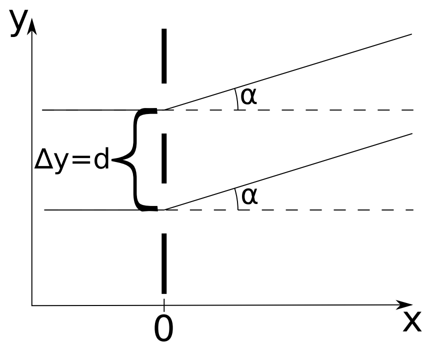
$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^3}{\exp(x)-1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Aufgabe P4: Beugung

Hier betrachten wir die Beugung am Doppelspalt und wollen zeigen, dass auch hierfür die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta y \Delta p_y = 2\pi\hbar \geq \frac{\hbar}{2}$$

erfüllt ist. Wir konzentrieren uns hier vornehmlich auf den Teilchencharakter des Lichts, obwohl das Licht bekanntermaßen auch Wellencharakter besitzt.
Um obige Bedingung zu zeigen, nehmen wir an, dass der Abstand zwischen den beiden Spalten als Unschärfe in y, also als Unschärfe im Ort, aufgefasst wird. Die Mitte zwischen den beiden Spalten soll bei $x = 0$ liegen (siehe Abbildung). Dann verschwindet in diesem Punkt der Impuls $p_y = 0$ in y-Richtung. Nach Passieren des Doppelspalts ergibt sich aufgrund der Beugung eine Unschärfe Δp_y für den (nicht-verschwindenden) Impuls p_y in y-Richtung.

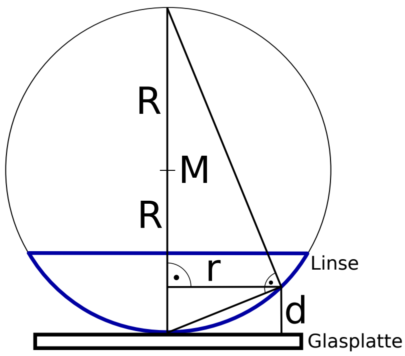


a) Bestimmen Sie Δp_y in Abhängigkeit vom Winkel α und Gesamtimpuls p. Wie lässt sich dieser Ausdruck mithilfe der de Broglie-Beziehung durch die Wellenlänge λ ausdrücken?

b) Nutzen Sie die Bedingung für konstruktive Interferenz und setzen Sie diese mit der Bedingung aus der Impuls-Unschärfe Δp_y gleich.

c) Zeigen Sie daraus, dass die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt ist.

Aufgabe H3: Interferenz



Wir betrachten eine Linse mit Krümmungsradius R, die auf einer Glasplatte liegt wie in der Abbildung links. Lässt man nun Licht der Wellenlänge λ senkrecht einfallen, beobachtet man ein Beugungsmuster, durch die Reflektion an dem Übergang Linse/Luft und an der Glasplatte.
Geben Sie die Orte r der Intensitätsminima an. Sie können annehmen, dass der Abstand d zwischen Linse und Glasplatte sehr viel kleiner als der Krümmungsradius R der Linse ist und dadurch auftretende Terme d^2 vernachlässigbar sind.

Aufgabe H4: Compton Effekt

Ein Photon wird an einem Elektron gestreut, wie in der Vorlesung besprochen.

a) Bei welchem Winkel tritt die maximale Änderung der Wellelänge des Photons auf und wie groß ist diese?

b) Berechnen Sie den Streuwinkel unter dem die Wellenlänge des gestreuten Photons doppelt so groß ist wie die des einfallenden. Wie groß darf die Wellenlänge des einfallenden Photons maximal sein damit eine Wellenlängenverdopplung möglich ist?

Aufgabe H5: Bohrsches Atommodell

Das Bohrsche Atommodell erlaubt die Beschreibung der Spektrallinien im Wasserstoffatom. Man kann damit aber auch eine Abschätzung des Atomradius erhalten. Dazu nehmen wir eine stationäre Kreisbahn an ($\theta = \text{const.}$ und $L_z = \text{const.}$). Berechnen Sie die Radien r_n und die Umlauffrequenz $\omega_n = \dot{\varphi}_n$. Setzen Sie dazu Coulomb Kraft und Zentrifugalkraft gleich und verwenden Sie die Bohrsche Quantenhypothese, die für dieses Problem wie folgt aussieht

$$hn = \int d\varphi \, p.$$

Bestimmen Sie weiterhin die numerischen Werte für den Radius der ersten Bahn r_1 und deren Umlauffrequenz ω_1.