Quantentheorie
und Statistische Physik für LaG

Prof. Dr. J. Wambach

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014

1. Übungsblatt 16. April 2014

Aufgabe P1: Unschärferelation und Wasserstoff-Atom

Das Wasserstoff-Atom besteht aus einem Proton und einem Elektron. Da die Protonenmasse $m_p \gg m_e$ viel größer ist als die des Elektrons, kann das Proton als ruhend im Koordinatenursprung angesehen werden. In diesem System wirkt die anziehende Coulomb-Kraft des Protons auf das Elektron und klassisch würde man erwarten, dass sich beliebig tiefe Energiezustände realisieren lassen. Zeigen Sie mit der Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

dass es bei einer quantenmechanischen Betrachtung ein endliches Energieminimum gibt. Nehmen Sie dazu an, dass die Unschärfe im Ort Δx der Radius des Atoms a sei und $p \geq \Delta p$.

Tipp: Wie lautet die Gesamtenergie $E = T + V$ des Systems? Welche Einschränkungen erhalten Sie für die Impulsunschärfe Δp, falls die Ortsunschärfe Δx bekannt ist?

Aufgabe P2: Wiederholung Eigenwerte, Eigenvektoren und Basiswechsel

Gegeben seien die Matrizen

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{W} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie jeweils das charakteristische Polynom der Matrizen. Wie lauten die Eigenwerte der Matrizen?
Hinweis: Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix $\underline{A}$ ist definiert durch

$$\det\left(\underline{A} - \lambda \underline{1}\right) = 0,$$

wobei det die Determinante und $\underline{1}$ die n-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Die Nullstellen $\{\lambda\}$ des charakteristischen Polynoms nennt man Eigenwerte der Matrix $\underline{A}$.

b) Berechnen Sie die zu den Eigenwerten der Matrix $\underline{M}$ gehörende (normierte) Eigenvektoren.
Hinweis: Den Eigenvektor $\vec{v}_i$ zum Eigenwert λ_i der Matrix $\underline{A}$ erhält man aus

$$\left(\underline{A} - \lambda_i \underline{1}\right) \vec{v}_i = 0.$$

c) Bestimmen Sie die orthogonale Transformationsmatrix $\underline{U}$ so, dass die resultierende Matrix $\underline{M}'$, definiert durch

$$\underline{M}' = \underline{U}^{-1} \underline{M}\, \underline{U}$$

Diagonalgestalt hat. Die Einträge von $\underline{M}'$ auf der Diagonalen entsprechen den Eigenwerten λ von $\underline{M}$. Wie hängt $\underline{U}$ mit den Eigenvektoren von $\underline{M}$ zusammen?
Tipp: Vergleichen Sie $\underline{U}$ mit ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe b).

Aufgabe H1: Wiederholung Delta-Funktion und Theta-Funktion

Die Dirac'sche δ-Funktion (eigentlich δ-Distribution) ist folgendermaßen definiert:

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx f(x)\delta(x-x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in]\alpha,\beta[, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Heaviside'sche Θ-Funktion (auch Stufenfunktion genannt) ist durch

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

definiert.

a) Berechnen Sie: i) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-ikx)\delta(x+a)$ ii) $\int_{-\infty}^{3} dx\, x\Theta(x-2)$

b) Eine Darstellung der Delta-Funktion ist

$$\delta(x-x_0) = \lim_{b\to 0} \varphi_b(x-x_0),$$

wobei $\varphi_b(x-x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}b}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}\right)$.
Skizzieren Sie $\varphi_b(x)$ für verschiedene Werte von b und separat die Funktion $\Theta(x-0)$. Überprüfen Sie explizit, dass $\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x) = 1$ erfüllt ist.

Hinweis: Führen Sie die auftretenden Integrale auf die Form $\int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-u^2)$ zurück und benutzen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-x^2\right) = \sqrt{\pi}$$

gilt.

Aufgabe H2: Wiederholung Vektoranalysis

Nabla-Operator: $\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$

Gradient eines Skalarfeldes: $\nabla\phi(\vec{r}) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{e}_z$

Laplace-Operator: $\Delta = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Divergenz eines Vektorfeldes: $\nabla\cdot\vec{V}(\vec{r}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

a) Berechnen Sie:
i) $\nabla \sin(xyz)$ ii) $\Delta\left(\exp(xy)\right)$ iii) $\Delta(x^2+y^2+z^2)$ iv) $\Delta\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ v) $\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

b) Zeigen Sie, dass $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$, wobei $r = |\vec{r}|$.

c) Sei $\phi(\vec{r}) = f(r)$ eine beliebige Funktion, die nur von r abhängt. Zeigen Sie, dass

$$\nabla\phi(\vec{r}) = \frac{df}{dr}\frac{\vec{r}}{r} \quad \text{und} \quad \Delta\phi(\vec{r}) = \frac{d^2f(r)}{dr^2} + \frac{df(r)}{dr}\frac{2}{r}.$$