Berechnung von T-Matrixelementen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- T-Matrixelemente:

$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | iT | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle = \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \Big({}_0\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | T\Big\{\exp\Big(-i\int_{-\tau}^{\tau} dt\, H_I(t)\Big)\Big\} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0 \Big)_{\substack{\text{verbunden,}\\ \text{amputiert}}}$$

- störungstheoretische Berechnung mit Hilfe des Wick-Theorems:
  - Beiträge unkontrahierter Operatoren verschwinden nicht austomatisch,

    z.B. $\phi_I^{(+)}(x)|\vec{p}\rangle_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}}\, a_{\vec{k}}\, e^{-ik\cdot x}\, \sqrt{2E_p}\, a^\dagger_{\vec{p}}\, |0\rangle = e^{-ip\cdot x}\, |0\rangle$

  - Kontraktionen mit Zuständen:

    $\overbracket{\phi_I(x)|\vec{p}}\rangle_0 = e^{-ip\cdot x}\,|0\rangle\,, \quad {}_0\langle\overbracket{\vec{p}|\phi_I}(x) = \langle 0|e^{ip\cdot x}$

  - nichtverschwindende Erwartungswerte

    $\leftrightarrow$ vollständige Kontraktionen von Operatoren und Zuständen

Feynman-Regeln für die invariante Amplitude (ϕ^4-Theorie, Impulsraum)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$i\mathcal{M} = \sum$ verbundene amputierte Diagramme

mit

- Propagator mit Impuls p (interne Linien): $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$
- externe Linien: 1
- Vertex: $-i\lambda$
- Viererimpulserhaltung an jedem Vertex
- Integriere über alle unbestimmten Impulse $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$
- Teile durch Symmetriefaktor

Feynman-Regeln für Fermionen

- Feldoperator im Wechselwirkungsbild:

$$\psi(x) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\,\sum_s\left(a^s_{\vec p}\,u^s(\vec p)\,e^{-ip\cdot x} + b^{s\,\dagger}_{\vec p}\,v^s(\vec p)\,e^{ip\cdot x}\right) \equiv \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)$$

- zeitgeordnetes Produkt: $T\left\{\psi(x)\bar\psi(y)\right\} = \begin{cases} \psi(x)\bar\psi(y) & \text{falls} \quad x^0 > y^0 \\ -\bar\psi(y)\psi(x) & \text{"} \quad y^0 > x^0 \end{cases}$
  - $T\{\psi\psi\}$, $T\{\overline{\psi\psi}\}$, mehr als zwei Felder analog
- normalgeordnetes Produkt: ebenfalls Minuszeichen bei Vertauschung
  - z.B. $N\left\{\psi^{(+)}(x)\psi^{(-)}(y)\right\} = -\psi^{(-)}(y)\psi^{(+)}(x)$
- Kontraktionen:
  - $\wick{\c{\psi}(x)\c{\bar\psi}(y)} = \left\{\begin{array}{lll} \{\psi^{(+)}(x), \bar\psi^{(-)}(y)\} & \text{für} & x^0 > y^0 \\ -\{\psi^{(+)}(y), \psi^{(-)}(x)\} & \text{"} & y^0 > x^0 \end{array}\right\} = S_F(x-y)$
  - $\wick{\c{\bar\psi}(x)\c{\psi}(y)} = -S_F(y-x)$ Fermion-Propagatoren haben eine Richtung
  - $\wick{\c{\psi}(x)\c{\psi}(y)} = \wick{\c{\bar\psi}(x)\c{\bar\psi}(y)} = 0$

Feynman-Regeln für Fermionen

- Wick'sches Theorem: wie bei Bosonen

  z.B. $T\left\{\psi_1\overline{\psi}_2\psi_3 \ldots\right\} = N\Big\{\psi_1\overline{\psi}_2\psi_3 \cdots + \text{alle möglichen Kontraktionen}\Big\}$

- Kontraktionen mit Zuständen:

$$\psi(x)|\vec{p}, s\rangle_a = u^s(\vec{p})e^{-ip\cdot x}\,|0\rangle\,, \qquad {}_b\langle\vec{p}, s|\bar{\psi}(x) = \langle 0|\bar{v}^s(\vec{p})e^{ip\cdot x}$$

- externe Linien in T-Matrix-Elementen:
  - einlaufendes Fermion: $u^s(\vec{p})$
  - auslaufendes Fermion: $\bar{u}^s(\vec{p})$
  - einlaufendes Anti-Fermion: $\bar{v}^s(\vec{p})$
  - auslaufendes Anti-Fermion: $v^s(\vec{p})$
- geschlossene Fermion-Loops: Minuszeichen + Spur im Dirac-Raum
- relatives Minuszeichen zwischen Diagrammen, die durch Austausch zweier externer Fermionen aus einander hervorgehen