Quantenelektrodynamik (QED)

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Quantenelektrodynamik (QED)

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L}_{QED} = \underbrace{\overline{\psi}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi}_{\text{freies Elektron}} \underbrace{- \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{freies Photon}} \underbrace{- e\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,A_\mu}_{\mathscr{L}_{WW}}$
  - invariant unter globalen Phasentransformationen $\psi \to e^{i\alpha}\psi \Leftrightarrow \overline{\psi} \to \overline{\psi}e^{-i\alpha}$

    Noether-Strom: $j^\mu_{\text{Teilchen}} = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}_{WW} = -e\,j^\mu_{\text{Teilchen}} A_\mu$

Quantenelektrodynamik (QED)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L}_{QED} = \underbrace{\overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi}_{\text{freies Elektron}} \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{freies Photon}} \underbrace{-e\,\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\, A_{\mu}}_{\mathscr{L}_{WW}}$
  - invariant unter globalen Phasentransformationen $\psi \to e^{i\alpha}\psi \Leftrightarrow \overline{\psi} \to \overline{\psi}e^{-i\alpha}$

    Noether-Strom: $j^{\mu}_{\text{Teilchen}} = \overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}_{WW} = -e\, j^{\mu}_{\text{Teilchen}} A_{\mu}$
  - invariant unter simultanen lokalen „Eich”-Transformationen

    $$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)}, \quad A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) - \tfrac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha(x)$$
  - kovariante Ableitung: $D_{\mu} = \partial_{\mu} + ieA_{\mu}$

    $\Rightarrow \quad \mathscr{L}_{QED} = \overline{\psi}\left(iD\!\!\!\!/ - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

Quantenelektrodynamik (QED)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L}_{QED} = \underbrace{\overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi}_{\text{freies Elektron}} \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{freies Photon}} \underbrace{-e\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\, A_\mu}_{\mathscr{L}_{WW}}$
  - invariant unter globalen Phasentransformationen $\psi \to e^{i\alpha}\psi \Leftrightarrow \overline{\psi} \to \overline{\psi}e^{-i\alpha}$

    Noether-Strom: $j^\mu_{\text{Teilchen}} = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}_{WW} = -e\, j^\mu_{\text{Teilchen}} A_\mu$
  - invariant unter simultanen lokalen „Eich"-Transformationen

    $\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)}, \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$
  - kovariante Ableitung: $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$

    $\Rightarrow \quad \mathscr{L}_{QED} = \overline{\psi}\left(iD\!\!\!\!/ - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
- Bewegungsgleichungen:
  - $\left(iD\!\!\!\!/ - m\right)\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi = eA\!\!\!/\psi$
  - $\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\, j^\mu_{\text{Teilchen}} \equiv j^\mu_{\text{Ladung}}$ inhomogene Maxwell-Gln.

    $\Rightarrow$ Kopplungskonstante: e = Elektron-Ladung (im klassischen Grenzfall)

Mögliche Wechselwirkungsterme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Renormierbarkeit:

  Die Kopplungskonstanten dürfen keine negative Energie-Dimension haben:

  $[\lambda] = [\text{Energie}]^m \overset{\text{z.B.}}{=} (\text{MeV})^m\,, \quad m \geq 0$

Mögliche Wechselwirkungsterme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Renormierbarkeit:

  Die Kopplungskonstanten dürfen keine negative Energie-Dimension haben:

  $$[\lambda] = [\text{Energie}]^m \overset{\text{z.B.}}{=} (\text{MeV})^m\,, \quad m \geq 0$$

- Felder:
  - skalare Felder: $[\phi] = \text{MeV}$
  - Dirac-Felder: $[\psi] = (\text{MeV})^{3/2}$
  - elektromagnetisches Feld: $[A_\mu] = \text{MeV}$

Mögliche Wechselwirkungsterme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Renormierbarkeit:

  Die Kopplungskonstanten dürfen keine negative Energie-Dimension haben:

  $$[\lambda] = [\text{Energie}]^m \overset{\text{z.B.}}{=} (\text{MeV})^m\,, \quad m \geq 0$$

- Felder:
  - skalare Felder: $[\phi] = \text{MeV}$
  - Dirac-Felder: $[\psi] = (\text{MeV})^{3/2}$
  - elektromagnetisches Feld: $[A_\mu] = \text{MeV}$
- erlaubte Wechselwirkungen:
  - $\lambda\phi^3, \quad \lambda\phi^4$
  - $\lambda\bar{\psi}\not{A}\psi$ (QED)
  - $\lambda\bar{\psi}\psi\phi$ (Yukawa-Theorie)
  - $\lambda A^2\partial_\mu A^\mu, \quad \lambda A^4$ (QCD)
  - $\lambda(\phi\partial_\mu\phi)A^\mu, \quad \lambda\phi^2 A^2$ (skalare QED)

Störungstheoretische Entwicklung von Korrelationsfunktionen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- 2-Punkt-Korrelationsfunktion: $\langle\Omega|T\,\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$
  - $|\Omega\rangle$: Grundzustand der wechselwirkenden Theorie
- freie Theorie: $\langle 0|T\,\phi(x)\phi(y)|0\rangle = D_F(x-y) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}\,e^{-ip\cdot(x-y)}$

Störungstheoretische Entwicklung von Korrelationsfunktionen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- 2-Punkt-Korrelationsfunktion: $\langle\Omega|T\,\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$
  - $|\Omega\rangle$: Grundzustand der wechselwirkenden Theorie
- freie Theorie: $\langle 0|T\,\phi(x)\phi(y)|0\rangle = D_F(x-y) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}\,e^{-ip\cdot(x-y)}$
- Auswirkungen der Wechselwirkung $H = H_0 + H_{WW}$:
  - modifizierte Zeitentwicklung: $e^{iHt}\phi(\vec{x})e^{-iHt} \neq e^{iH_0 t}\phi(\vec{x})e^{-iH_0 t}$
  - modifizierter Grundzustand: $|\Omega\rangle \neq |0\rangle$

Störungstheoretische Entwicklung von Korrelationsfunktionen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- 2-Punkt-Korrelationsfunktion: $\langle \Omega | T\, \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle$
  - $|\Omega\rangle$: Grundzustand der wechselwirkenden Theorie
- freie Theorie: $\langle 0 | T\, \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle = D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\, e^{-ip\cdot(x-y)}$
- Auswirkungen der Wechselwirkung $H = H_0 + H_{WW}$:
  - modifizierte Zeitentwicklung: $e^{iHt}\phi(\vec{x})e^{-iHt} \neq e^{iH_0t}\phi(\vec{x})e^{-iH_0t}$
  - modifizierter Grundzustand: $|\Omega\rangle \neq |0\rangle$
- Ziel: störungstheoretische Entwicklung beider Effekte in ϕ^4-Theorie
  - $H_{WW} = \int d^3x\, \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)$

Zeitentwicklung

- Feldoperator: $\phi(t_0, \vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$
  - t_0: feste vorgegebene Zeit (z.B. $t_0 = 0$)
  - Quantisierungsregeln wie in der nicht-wechselwirkenden Theorie:
    $[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{q}}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$ etc.
- Zeitentwicklung im Heisenberg-Bild: $\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)}$

Zeitentwicklung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Feldoperator: $\phi(t_0, \vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$
  - t_0: feste vorgegebene Zeit (z.B. $t_0 = 0$)
  - Quantisierungsregeln wie in der nicht-wechselwirkenden Theorie:
    $[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{q}}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$ etc.
- Zeitentwicklung im Heisenberg-Bild: $\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)}$
- Wechselwirkungsbild:
  - Zeitentwicklung der Operatoren mit H_0
  - Zeitentwicklung der Zustände mit H_{WW}

Zeitentwicklung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Feldoperator: $\phi(t_0, \vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$
  - t_0: feste vorgegebene Zeit (z.B. $t_0 = 0$)
  - Quantisierungsregeln wie in der nicht-wechselwirkenden Theorie:
    $[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{q}}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$ etc.
- Zeitentwicklung im Heisenberg-Bild: $\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)}$
- Wechselwirkungsbild:
  - Zeitentwicklung der Operatoren mit H_0
  - Zeitentwicklung der Zustände mit H_{WW}

$\Rightarrow$ Wechselwirkungsbild-Feldoperator:

$$\phi_I(t, \vec{x}) = \phi(t, \vec{x})\big|_{\lambda=0} = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + a^\dagger_{\vec{p}} e^{ip\cdot x} \right)\Big|_{x^0 = t - t_0}$$