Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- freies elektromagnetisches Feld in Lorenz-Eichung:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu), \qquad \partial_\mu A^\mu = 0$$

  - kanonisch-konjugierte Impulsdichten: $\pi^\mu(x) = -\dot{A}^\mu(x)$
  - Bewegungsgl.: $\Box A^\mu = 0 \quad \hat{=} \quad$ K-G-Gl. mit $m = 0$ für jede Komponente

- Fourier-Entwicklung:

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left(a_{\vec{p}}^\lambda \varepsilon_\lambda{}^\mu e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^{\lambda\,\dagger} \varepsilon_\lambda{}^{\mu\,*} e^{ip\cdot x} \right) \equiv A^{\mu(+)}(x) + A^{\mu(-)}(x)$$

  Polarisationsvektoren (spezielle Wahl):

  - $\varepsilon_0(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ skalare Polarisation
  - $\varepsilon_i(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\varepsilon}_i(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad , \qquad \vec{\varepsilon}_i^{\,*} \cdot \vec{\varepsilon}_j = \delta_{ij}$

    $\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_1(\vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_2(\vec{p}) = 0$ transversale Polarisation

    $\varepsilon_3(\vec{p}) = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ longitudinale Polarisation

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Quantisierungsvorschrift:

$$[A^\mu(\vec{x}), \dot{A}^\nu(\vec{y})] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\, g^{\mu\nu}\,, \quad [A^\mu(\vec{x}), A^\nu(\vec{y})] = [\dot{A}^\mu(\vec{x}), \dot{A}^\nu(\vec{y})] = 0$$

$$\leftrightarrow \quad [a^\rho_{\vec{p}}, a^{\sigma\,\dagger}_{\vec{q}}] = -g_{\rho\sigma}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p} - \vec{q})\,, \quad [a^\rho_{\vec{p}}, a^\sigma_{\vec{q}}] = [a^{\rho\,\dagger}_{\vec{p}}, a^{\sigma\,\dagger}_{\vec{q}}] = 0$$

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Quantisierungsvorschrift:

$$[A^\mu(\vec{x}), \dot{A}^\nu(\vec{y})] = -i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\, g^{\mu\nu}\,, \quad [A^\mu(\vec{x}), A^\nu(\vec{y})] = [\dot{A}^\mu(\vec{x}), \dot{A}^\nu(\vec{y})] = 0$$

$$\leftrightarrow \quad [a^\rho_{\vec{p}}, a^{\sigma\,\dagger}_{\vec{q}}] = -g_{\rho\sigma}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\,, \quad [a^\rho_{\vec{p}}, a^\sigma_{\vec{q}}] = [a^{\rho\,\dagger}_{\vec{p}}, a^{\sigma\,\dagger}_{\vec{q}}] = 0$$

- Hamilton-Operator: $H = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, E_P \sum_{\lambda=0}^{3} \zeta_\lambda\, a^{\lambda\,\dagger}_{\vec{p}} a^\lambda_{\vec{p}}\,, \quad \zeta_\lambda = \begin{cases} -1 & \lambda = 0 \\ +1 & \lambda = 1,2,3 \end{cases}$

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Quantisierungsvorschrift:

  $[A^\mu(\vec{x}), \dot{A}^\nu(\vec{y})] = -i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\, g^{\mu\nu}\,, \quad [A^\mu(\vec{x}), A^\nu(\vec{y})] = [\dot{A}^\mu(\vec{x}), \dot{A}^\nu(\vec{y})] = 0$

  $\leftrightarrow \quad [a^\rho_{\vec{p}}, a^{\sigma\,\dagger}_{\vec{q}}] = -g_{\rho\sigma}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\,, \quad [a^\rho_{\vec{p}}, a^\sigma_{\vec{q}}] = [a^{\rho\,\dagger}_{\vec{p}}, a^{\sigma\,\dagger}_{\vec{q}}] = 0$

- Hamilton-Operator: $H = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, E_P \sum_{\lambda=0}^{3} \zeta_\lambda\, a^{\lambda\,\dagger}_{\vec{p}} a^\lambda_{\vec{p}}\,, \quad \zeta_\lambda = \begin{cases} -1 & \lambda = 0 \\ +1 & \lambda = 1,2,3 \end{cases}$

- Vakuum: $a^\lambda_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall\, \vec{p}, \lambda$

- Einteilchenzustände: $|\vec{p}, \lambda\rangle = \mathcal{N} a^{\lambda\,\dagger}_{\vec{p}}|0\rangle$
  - $H|\vec{p}, \lambda\rangle = +E_p|\vec{p}, \lambda\rangle \quad \checkmark$
  - $\langle\vec{p}, \lambda|\vec{p}, \lambda\rangle = \zeta_\lambda(2\pi)^3\delta^3(\vec{0})\,|\mathcal{N}|^2\langle 0|0\rangle$ negativ für $\lambda = 0$!

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Quantisierungsvorschrift:

$$[A^\mu(\vec{x}), \dot{A}^\nu(\vec{y})] = -i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\, g^{\mu\nu}\,, \quad [A^\mu(\vec{x}), A^\nu(\vec{y})] = [\dot{A}^\mu(\vec{x}), \dot{A}^\nu(\vec{y})] = 0$$

$$\leftrightarrow \quad [a^\rho_{\vec{p}}, a^{\sigma\,\dagger}_{\vec{q}}] = -g_{\rho\sigma}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\,, \quad [a^\rho_{\vec{p}}, a^\sigma_{\vec{q}}] = [a^{\rho\,\dagger}_{\vec{p}}, a^{\sigma\,\dagger}_{\vec{q}}] = 0$$

- Hamilton-Operator: $H = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, E_P \sum_{\lambda=0}^{3} \zeta_\lambda\, a^{\lambda\,\dagger}_{\vec{p}} a^\lambda_{\vec{p}}\,, \quad \zeta_\lambda = \begin{cases} -1 & \lambda = 0 \\ +1 & \lambda = 1,2,3 \end{cases}$

- Vakuum: $a^\lambda_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall\, \vec{p}, \lambda$

- Einteilchenzustände: $|\vec{p},\lambda\rangle = \mathcal{N} a^{\lambda\,\dagger}_{\vec{p}}|0\rangle$
  - $H|\vec{p},\lambda\rangle = +E_p|\vec{p},\lambda\rangle \quad \checkmark$
  - $\langle\vec{p},\lambda|\vec{p},\lambda\rangle = \zeta_\lambda(2\pi)^3\delta^3(\vec{0})\,|\mathcal{N}|^2\langle 0|0\rangle$ negativ für $\lambda = 0$!

Die Lorenz-Eichbedingung muss noch implementiert werden!

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

- Problem:

  $\partial_\mu A^\mu = 0 \;\Rightarrow\; \dot{A}^0 = -\partial_k A^k \;\Rightarrow\; [A^0(\vec{x}), \dot{A}^0(\vec{y})] = -\frac{\partial}{\partial y^k}[A^0(\vec{x}), A^k(\vec{y})] = 0$

  ➞ $\partial_\mu A^\mu = 0$ kann keine Operator-Identität sein!

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem:

  $\partial_\mu A^\mu = 0 \;\Rightarrow\; \dot{A}^0 = -\partial_k A^k \;\Rightarrow\; [A^0(\vec{x}), \dot{A}^0(\vec{y})] = -\frac{\partial}{\partial y^k}[A^0(\vec{x}), A^k(\vec{y})] = 0$

  $\rightarrow$ $\partial_\mu A^\mu = 0$ kann keine Operator-Identität sein!

- Gupta & Bleuler: Einschränkung des erlaubten Zustandsraums

  $\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)|\Psi\rangle \stackrel{!}{=} 0$ für alle physikalischen Zustände $|\Psi\rangle$

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem:

  $\partial_\mu A^\mu = 0 \;\Rightarrow\; \dot{A}^0 = -\partial_k A^k \;\Rightarrow\; [A^0(\vec{x}), \dot{A}^0(\vec{y})] = -\frac{\partial}{\partial y^k}[A^0(\vec{x}), A^k(\vec{y})] = 0$

  $\rightarrow$ $\partial_\mu A^\mu = 0$ kann keine Operator-Identität sein!

- Gupta & Bleuler: Einschränkung des erlaubten Zustandsraums

  $\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)|\Psi\rangle \stackrel{!}{=} 0$ für alle physikalischen Zustände $|\Psi\rangle$

- Konsequenzen:
  - $\langle\Psi|\partial_\mu A^\mu|\Psi\rangle = 0 \quad \Rightarrow$ Eichbedigung gilt im klassischen Limes

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problem:

  $\partial_\mu A^\mu = 0 \;\Rightarrow\; \dot{A}^0 = -\partial_k A^k \;\Rightarrow\; [A^0(\vec{x}), \dot{A}^0(\vec{y})] = -\frac{\partial}{\partial y^k}[A^0(\vec{x}), A^k(\vec{y})] = 0$

  $\rightarrow$ $\partial_\mu A^\mu = 0$ kann keine Operator-Identität sein!

- Gupta & Bleuler: Einschränkung des erlaubten Zustandsraums

  $\partial_\mu A^{\mu\,(+)}(x)|\Psi\rangle \stackrel{!}{=} 0$ für alle physikalischen Zustände $|\Psi\rangle$

- Konsequenzen:

  - $\langle\Psi|\partial_\mu A^\mu|\Psi\rangle = 0 \quad\Rightarrow$ Eichbedigung gilt im klassischen Limes
  - $\langle\Psi|H|\Psi\rangle = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, E_p \sum_{\lambda=1,2}\langle\Psi|a_{\vec{p}}^{\lambda\,\dagger} a_{\vec{p}}^{\lambda}|\Psi\rangle$

    Nur transversale Photonen tragen zum Energie-Erwatungswert bei!

Photon-Propagator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Analog zum Klein-Gordon-Fall:

- Korrelator: $\langle 0|A^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle = -g^{\mu\nu} D(x-y)\big|_{m\to 0}$
- Feynman-Propagator:

$$D_F^{\mu\nu} = \langle 0|T\,A^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle = -g^{\mu\nu} D_F(x-y)\big|_{m\to 0} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2+i\varepsilon}\,e^{-ip\cdot(x-y)}$$

Wechselwirkungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- freie Felder:
  - Fourier-Moden entkoppeln
  - unabhängige „harmonische Oszillatoren” für jeden Impuls
  - lineare Bewegungsgleichungen
- Wechselwirkungsterme: $\mathscr{L}_{WW} \leftrightarrow \mathscr{H}_{WW}$
  - koppeln die Moden $\rightarrow$ Streuprozesse, Teilchenerzeugung und -vernichtung
  - nichtlineare Bewegungsgleichungen
- Kausalität: nur lokale WW-Terme
  - $\phi(x)^n, \quad \phi(x)\partial_\mu\phi(x)A^\mu(x) \qquad \checkmark$
  - $\phi(x)\phi(y)$ nicht erlaubt

Wechselwirkungen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- freie Felder:
  - Fourier-Moden entkoppeln
  - unabhängige „harmonische Oszillatoren” für jeden Impuls
  - lineare Bewegungsgleichungen
- Wechselwirkungsterme: $\mathscr{L}_{WW} \leftrightarrow \mathscr{H}_{WW}$
  - koppeln die Moden $\rightarrow$ Streuprozesse, Teilchenerzeugung und -vernichtung
  - nichtlineare Bewegungsgleichungen
- Kausalität: nur lokale WW-Terme
  - $\phi(x)^n, \quad \phi(x)\partial_\mu\phi(x)A^\mu(x) \quad \checkmark$
  - $\phi(x)\phi(y)$ nicht erlaubt
- ϕ^4-Theorie: $\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 = \mathscr{L}_{KG} + \mathscr{L}_{WW}$
  - λ: dimensionslose „Kopplungskonstante”
  - Bewegungsgleichung: $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3$
  - Quantisierung unverändert: $[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ etc.