Quantisierung des Dirac-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hamilton-Operator:

$$H = \int d^3x\, \psi^\dagger(\vec{x})\, \hat{H}_D\, \psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a^{s\,\dagger}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} - b^s_{\vec{p}} b^{s\,\dagger}_{\vec{p}} \right)$$

Quantisierung des Dirac-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hamilton-Operator:

$$H = \int d^3x\, \psi^\dagger(\vec{x})\, \hat{H}_D\, \psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \begin{cases} \left(a_{\vec{p}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^{s} - b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} b_{\vec{p}}^{s} + (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0})\right) & \text{„-"} \\ \left(a_{\vec{p}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^{s} + b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} b_{\vec{p}}^{s} - (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0})\right) & \text{„+"} \end{cases}$$

Quantisierung des Dirac-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hamilton-Operator:

$$H = \int d^3x\, \psi^\dagger(\vec{x})\, \hat{H}_D\, \psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \begin{cases} \left(a_{\vec{p}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} b_{\vec{p}}^s + (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0})\right) & \text{„-"} \\ \left(a_{\vec{p}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} b_{\vec{p}}^s - (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0})\right) & \text{„+"} \end{cases}$$

→ Antikommutator:

$$\{\psi_a(\vec{x}); \psi_b^\dagger(\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab}\,, \quad \{\psi_a(\vec{x}); \psi_b(\vec{y})\} = \{\psi_a^\dagger(\vec{x}); \psi_b^\dagger(\vec{y})\} = 0$$

$$\{a_{\vec{p}}^r, a_{\vec{q}}^{s\,\dagger}\} = \{b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^{s\,\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})\, \delta_{rs}$$

$$\{a_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^{s\,\dagger}\} = (\text{ alle anderen}) = 0$$

Quantisierung des Dirac-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hamilton-Operator:

$$H = \int d^3x\, \psi^\dagger(\vec{x})\, \hat{H}_D\, \psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \begin{cases} \left(a^{s\,\dagger}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} - b^{s\,\dagger}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}} + (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0})\right) & \text{„-"} \\ \left(a^{s\,\dagger}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} + b^{s\,\dagger}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}} - (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0})\right) & \text{„+"} \end{cases}$$

→ Antikommutator:

$$\{\psi_a(\vec{x}); \psi_b^\dagger(\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab}\,, \qquad \{\psi_a(\vec{x}); \psi_b(\vec{y})\} = \{\psi_a^\dagger(\vec{x}); \psi_b^\dagger(\vec{y})\} = 0$$

$$\{a^r_{\vec{p}}, a^{s\,\dagger}_{\vec{q}}\} = \{b^r_{\vec{p}}, b^{s\,\dagger}_{\vec{q}}\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})\, \delta_{rs}$$

$$\{a^r_{\vec{p}}, b^{s\,\dagger}_{\vec{q}}\} = (\text{ alle anderen}) = 0$$

- Feldoperatoren im Heisenberg-Bild:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a^s_{\vec{p}}\, u^s(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} + b^{s\,\dagger}_{\vec{p}}\, v^s(\vec{p})\, e^{ip\cdot x}\right)$$

$$\overline{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(b^s_{\vec{p}}\, \overline{v}^s(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} + a^{s\,\dagger}_{\vec{p}}\, \bar{u}^s(\vec{p})\, e^{ip\cdot x}\right)$$

Einteilchen-Zustände

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Energie: $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a_{\vec{p}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^{s} + b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} b_{\vec{p}}^{s} \right)$ (ohne Vakuum-Energie)

Einteilchen-Zustände

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Energie: $H = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p\left(a^{s\,\dagger}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} + b^{s\,\dagger}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}}\right)$ (ohne Vakuum-Energie)
- Impuls: $\vec{P} = \int d^3x\, \psi^\dagger(\vec{x})\,(-i\vec{\nabla})\,\psi(\vec{x}) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \vec{p}\left(a^{s\,\dagger}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} + b^{s\,\dagger}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}}\right)$

Einteilchen-Zustände

- Energie: $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a_{\vec{p}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} b_{\vec{p}}^s \right)$ (ohne Vakuum-Energie)
- Impuls: $\vec{P} = \int d^3x\, \psi^\dagger(\vec{x})\,(-i\vec{\nabla})\,\psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \vec{p}\,\left(a_{\vec{p}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} b_{\vec{p}}^s \right)$
- $\mathscr{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$ invariant unter $\psi \to e^{-i\alpha}\psi(x)$
  - Noether-Strom: $j^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$
  - erhaltene Ladung: $Q = \int d^3x\, \psi^\dagger\psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} b_{\vec{p}}^s \right)$

    (+ unendl. Vakuum-Beitrag)

Einteilchen-Zustände

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Energie: $H = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s E_p\left(a_{\vec{p}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^{s} + b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} b_{\vec{p}}^{s}\right)$ (ohne Vakuum-Energie)
- Impuls: $\vec{P} = \int d^3x\, \psi^\dagger(\vec{x})\,(-i\vec{\nabla})\,\psi(\vec{x}) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s \vec{p}\left(a_{\vec{p}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^{s} + b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} b_{\vec{p}}^{s}\right)$
- $\mathscr{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$ invariant unter $\psi \to e^{-i\alpha}\psi(x)$
  - Noether-Strom: $j^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$
  - erhaltene Ladung: $Q = \int d^3x\, \psi^\dagger\psi = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s \left(a_{\vec{p}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^{s} - b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} b_{\vec{p}}^{s}\right)$

    (+ unendl. Vakuum-Beitrag)

$\Rightarrow$ $a_{\vec{p}}^{s\,\dagger}$ erzeugt Teilchen, $b_{\vec{p}}^{s\,\dagger}$ Antiteilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Energie E_p.

- Antivertauschungsrelationen $a_{\vec{p}}^{r\,\dagger} a_{\vec{q}}^{s\,\dagger} = -a_{\vec{q}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^{r\,\dagger}$ ➞ Fermi-Dirac-Statistik

Spin

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtdrehimpuls (≙ erhaltene Noetherladungen zur Rotationsinvarianz):

$$\vec{J} = \int d^3x\, \psi^\dagger \Big(\underbrace{\vec{x} \times (-i\vec{\nabla})}_{\text{Bahndrehimpuls}} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{\Sigma}}_{\text{Spin}} \Big) \psi$$

- Spinmatrizen: $\Sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{ijk}\Sigma^k = \sigma^{ij} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j] \equiv 2S^{ij}$

Spin

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtdrehimpuls (≙ erhaltene Noetherladungen zur Rotationsinvarianz):

$$\vec{J} = \int d^3x\, \psi^\dagger \Big(\underbrace{\vec{x} \times (-i\vec{\nabla})}_{\text{Bahndrehimpuls}} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{\Sigma}}_{\text{Spin}} \Big) \psi$$

- Spinmatrizen: $\Sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$, $\quad \varepsilon^{ijk}\Sigma^k = \sigma^{ij} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j] \equiv 2S^{ij}$

- ruhende Teilchen / Antiteilchen:

$$J_z\, a_0^{s\dagger}|0\rangle = \begin{cases} +\frac{1}{2}\, a_0^{s\dagger}|0\rangle & \text{für} \quad \xi^s = \binom{1}{0} \\ -\frac{1}{2}\, a_0^{s\dagger}|0\rangle & \text{"} \quad \xi^s = \binom{0}{1} \end{cases}$$

$$J_z\, b_0^{s\dagger}|0\rangle = \begin{cases} -\frac{1}{2}\, b_0^{s\dagger}|0\rangle & \text{für} \quad \eta^s = \binom{1}{0} \\ +\frac{1}{2}\, b_0^{s\dagger}|0\rangle & \text{"} \quad \eta^s = \binom{0}{1} \end{cases}$$

Dirac-Propagator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Amplituden:
  - $\langle 0|\psi_a(x)\overline{\psi}_b(y)|0\rangle = \left(i\partial\!\!\!/_x + m\right)_{ab} D(x-y)$ Propagation von Teilchen
  - $\langle 0|\overline{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle = -\left(i\partial\!\!\!/_x + m\right)_{ab} D(y-x)$ Prop. von Antiteilchen
  - $D(x-y) = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ Klein-Gordon-Amplitude

Dirac-Propagator

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Dirac-Amplituden:
  - $\langle 0|\psi_a(x)\overline{\psi}_b(y)|0\rangle \;=\; \left(i\partial\!\!\!/_x + m\right)_{ab} D(x-y)$ Propagation von Teilchen
  - $\langle 0|\overline{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle \;=\; -\left(i\partial\!\!\!/_x + m\right)_{ab} D(y-x)$ Prop. von Antiteilchen
  - $D(x-y) = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ Klein-Gordon-Amplitude
- Feynman-Propagator:

$$S_F(x-y) = \langle 0|T\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle$$

$$\equiv \begin{cases} \langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle & \text{falls} \quad x^0 > y^0 \\ -\langle 0|\overline{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle & \text{"} \quad y^0 > x^0 \end{cases}$$

$$= i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{p\!\!\!/ + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\,e^{-ip\cdot(x-y)}$$