Lösungen der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ansatz für positive Frequenzen: $\psi_+(x) = u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x}$

$$u^s(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [E+m-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\xi \\ [E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2\,, \quad \xi^{r\dagger}\xi^s = \delta^{rs}$$

$$(\sigma^\mu) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (\bar{\sigma}^\mu) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ -\vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Lösungen der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ansatz für positive Frequenzen: $\psi_+(x) = u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x}$

$$u^s(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [E+m-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\xi \\ [E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix}, \quad s = 1,2\,, \quad \xi^{r\dagger}\xi^s = \delta^{rs}$$

$$(\sigma^\mu) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (\overline{\sigma}^\mu) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ -\vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

- Ansatz für negative Frequenzen: $\psi_-(x) = v(\vec{p})\, e^{ip\cdot x}$

$$v^s(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [E+m-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\eta \\ -[E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\,\eta^s \end{pmatrix}, \quad s = 1,2\,, \quad \eta^{r\dagger}\eta^s = \delta^{rs}$$

Lösungen der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ansatz für positive Frequenzen: $\psi_+(x) = u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x}$

$$u^s(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [E+m-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\xi \\ [E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix}, \quad s=1,2, \quad \xi^{r\dagger}\xi^s = \delta^{rs}$$

$$(\sigma^\mu) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (\bar{\sigma}^\mu) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ -\vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

- Ansatz für negative Frequenzen: $\psi_-(x) = v(\vec{p})\, e^{ip\cdot x}$

$$v^s(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [E+m-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\eta \\ -[E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta^s \end{pmatrix}, \quad s=1,2, \quad \eta^{r\dagger}\eta^s = \delta^{rs}$$

- Orthogonalitätsrelationen:

$$\bar{u}^r(\vec{p})u^s(\vec{p}) = 2m\,\delta^{rs}, \quad \bar{v}^r(\vec{p})v^s(\vec{p}) = -2m\,\delta^{rs}, \quad \bar{u}^r(\vec{p})v^s(\vec{p}) = \bar{v}^r(\vec{p})u^s(\vec{p}) = 0$$

$$u^{r\dagger}(\vec{p})u^s(\vec{p}) = v^{r\dagger}(\vec{p})v^s(\vec{p}) = 2E_{\vec{p}}\,\delta^{rs}, \quad u^{r\dagger}(\vec{p})v^s(-\vec{p}) = v^{r\dagger}(\vec{p})u^s(-\vec{p}) = 0$$

Lösungen der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Spin-Summen:

$$\sum_{s=1}^{2} u^s(\vec{p})\,\overline{u}^s(\vec{p}) = \not{p} + m$$

$$\sum_{s=1}^{2} v^s(\vec{p})\,\overline{v}^s(\vec{p}) = \not{p} - m$$

Lagrange-Dichte des Dirac-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$
  - ψ, $\overline{\psi}$ unabhängige Freiheitsgrade

- Euler-Lagrange-Gleichungen:
  - $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \psi_r} = 0$ ➞ adjungierte Gleichung
  - $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \overline{\psi}_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \overline{\psi}_r} = 0$ ➞ Dirac-Gleichung

- kanonisch konjugierte Impusdichte:
  - $\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}} = \overline{\psi} i \gamma^0 = i\psi^\dagger$
  - $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\overline{\psi}}} = 0 \quad \Rightarrow$ kein kanonisch konjugierter Impuls zu $\overline{\psi}$
  - Symmetrische Behandlung von ψ und $\overline{\psi}$ in einer alternativen Lagrange-Dichte möglich, aber unnötig und unüblich

Hamilton-Dichte des Dirac-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hamilton-Dichte: $\mathscr{H} = \pi\dot{\psi} - \mathscr{L} = \overline{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m)\psi = \psi^\dagger \hat{H}_D\,\psi$
- Dirac-Hamilton-Operator: $\hat{H}_D = -i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m \equiv -i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + \gamma^0 m$
- Eigenfunktionen:
  - $\hat{H}_D\, u^s(\vec{p})e^{-ip\cdot x} = E_{\vec{p}}\; u^s(\vec{p})e^{-ip\cdot x}$
  - $\hat{H}_D\, v^s(\vec{p})e^{ip\cdot x} = -E_{\vec{p}}\; v^s(\vec{p})e^{ip\cdot x}$

Quantisierung des Dirac-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Feldoperatoren im Schrödinger-Bild: $\psi(\vec{x}), \quad \pi(\vec{x}) = i\psi^\dagger(\vec{x})$

- naheliegende Quantisierungsvorschrift analog zu Klein-Gordon:

$$[\psi_a(\vec{x}); \psi_b^\dagger(\vec{y})] = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab}\,, \quad [\psi_a(\vec{x}); \psi_b(\vec{y})] = [\psi_a^\dagger(\vec{x}); \psi_b^\dagger(\vec{y})] = 0$$

Quantisierung des Dirac-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Feldoperatoren im Schrödinger-Bild: $\psi(\vec{x}), \quad \pi(\vec{x}) = i\psi^\dagger(\vec{x})$
- allgemeinerer Ansatz:

$$[\psi_a(\vec{x}); \psi_b^\dagger(\vec{y})]_\pm = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab}\,, \quad [\psi_a(\vec{x}); \psi_b(\vec{y})]_\pm = [\psi_a^\dagger(\vec{x}); \psi_b^\dagger(\vec{y})]_\pm = 0$$

  - $[A, B]_\pm = AB \pm BA \quad \Rightarrow \quad [A, B]_+ = \{A, B\}\,, \quad [A, B]_- = [A, B]$

Quantisierung des Dirac-Feldes

- Feldoperatoren im Schrödinger-Bild: $\psi(\vec{x}), \quad \pi(\vec{x}) = i\psi^\dagger(\vec{x})$
- allgemeinerer Ansatz:

$$[\psi_a(\vec{x}); \psi_b^\dagger(\vec{y})]_\pm = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{ab}\,, \quad [\psi_a(\vec{x}); \psi_b(\vec{y})]_\pm = [\psi_a^\dagger(\vec{x}); \psi_b^\dagger(\vec{y})]_\pm = 0$$

  - $[A,B]_\pm = AB \pm BA \quad \Rightarrow \quad [A,B]_+ = \{A,B\}\ , \quad [A,B]_- = [A,B]$

- Entwicklung nach Basisfunktionen:

$$\psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a^s_{\vec{p}}\, u^s(\vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^{s\,\dagger}_{\vec{p}}\, v^s(\vec{p})\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \sum_s \left(a^s_{\vec{p}}\, u^s(\vec{p}) + b^{s\,\dagger}_{-\vec{p}}\, v^s(-\vec{p}) \right)$$

  - erfüllt die (Anti-) Kommutatorrelationen, falls

$$[a^r_{\vec{p}}, a^{s\,\dagger}_{\vec{q}}]_\pm = \pm[b^r_{\vec{p}}, b^{s\,\dagger}_{\vec{q}}]_\pm = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\delta_{rs}$$

$$[a^r_{\vec{p}}, b^{s\,\dagger}_{\vec{q}}]_\pm = (\text{ alle anderen}) = 0$$