Darstellungen der Lorentzgruppe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lorentz-Boost entlang der x-Achse: $x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow x' = B_x(\phi)\, x$
  - $B_x(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - Rapidität: $\phi = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} \Rightarrow \cosh\phi = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \sinh\phi = \gamma v$
  - Generator: $K_x = -i \left. \frac{\partial B_x}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \quad B_x(\phi) = \exp(iK_x\phi)$

Darstellungen der Lorentzgruppe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- eigentliche Lorentz-Transformationen (Drehungen und Boosts):

  $x' = \exp[-i(\vec{J} \cdot \vec{\theta} - \vec{K} \cdot \vec{\phi})]\, x$

Darstellungen der Lorentzgruppe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- eigentliche Lorentz-Transformationen (Drehungen und Boosts):

  $$x' = \exp[-i(\vec{J} \cdot \vec{\theta} - \vec{K} \cdot \vec{\phi})]\, x$$

- Vertauschungsrelationen der Generatoren:

  $$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k, \qquad [K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk} J^k, \qquad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk} K^k$$

  $\Rightarrow$ Boosts alleine bilden keine Gruppe.

Darstellungen der Lorentzgruppe

- eigentliche Lorentz-Transformationen (Drehungen und Boosts):

$$x' = \exp[-i(\vec{J}\cdot\vec{\theta} - \vec{K}\cdot\vec{\phi})]\, x$$

- Vertauschungsrelationen der Generatoren:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k, \qquad [K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk} J^k, \qquad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk} K^k$$

$\Rightarrow$ Boosts alleine bilden keine Gruppe.

- Linearkombinationen: $A^k = \frac{1}{2}(J^k + iK^k), \quad B^k = \frac{1}{2}(J^k - iK^k)$

$$[A^i, A^j] = i\epsilon^{ijk} A^k, \qquad [B^i, B^j] = i\epsilon^{ijk} B^k, \qquad [A^i, B^j] = 0$$

$\Rightarrow$ eigentliche Lorentzgruppe $\hat{=}\ SU(2) \otimes SU(2)$

$\Rightarrow$ Zustände: (j_A, j_B)

Darstellungen der Lorentzgruppe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- eigentliche Lorentz-Transformationen (Drehungen und Boosts):

  $$x' = \exp[-i(\vec{J}\cdot\vec{\theta} - \vec{K}\cdot\vec{\phi})]\, x$$

- Vertauschungsrelationen der Generatoren:

  $$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k, \qquad [K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk} J^k, \qquad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk} K^k$$

  $\Rightarrow$ Boosts alleine bilden keine Gruppe.

- Linearkombinationen: $A^k = \frac{1}{2}(J^k + iK^k), \quad B^k = \frac{1}{2}(J^k - iK^k)$

  $$[A^i, A^j] = i\epsilon^{ijk} A^k, \qquad [B^i, B^j] = i\epsilon^{ijk} B^k, \qquad [A^i, B^j] = 0$$

  $\Rightarrow$ eigentliche Lorentzgruppe $\hat{=}\ SU(2) \otimes SU(2)$

  $\Rightarrow$ Zustände: (j_A, j_B)

- Spezialfälle:
  - $(j_A = j, j_B = 0) \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{K} = -i\vec{J}^{(j)}$
  - $(j_A = 0, j_B = j) \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{K} = i\vec{J}^{(j)}$

Spin-$\frac{1}{2}$-Zustände

- $(\frac{1}{2}, 0) \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2} \quad \Rightarrow \quad \xi \to \exp[-i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\phi})]\,\xi \equiv D(\Lambda)\xi$
- $(0, \frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = i\frac{\vec{\sigma}}{2} \quad \Rightarrow \quad \eta \to \exp[-i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\phi})]\,\eta \equiv \overline{D}(\Lambda)\eta$

Spin-$\frac{1}{2}$-Zustände

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $(\frac{1}{2}, 0) \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2} \quad \Rightarrow \quad \xi \to \exp[-i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\phi})]\,\xi \equiv D(\Lambda)\xi$
- $(0, \frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = i\frac{\vec{\sigma}}{2} \quad \Rightarrow \quad \eta \to \exp[-i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\phi})]\,\eta \equiv \overline{D}(\Lambda)\eta$
- Paritätstransformation: $\quad x = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to x' = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \vec{K} \to -\vec{K}, \quad \vec{J} \to \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} \leftrightarrow \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \xi \leftrightarrow \eta$$

Spin-$\frac{1}{2}$-Zustände

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $(\frac{1}{2}, 0) \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2} \quad \Rightarrow \quad \xi \to \exp[-i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\phi})]\,\xi \equiv D(\Lambda)\xi$
- $(0, \frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = \ \ i\frac{\vec{\sigma}}{2} \quad \Rightarrow \quad \eta \to \exp[-i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\phi})]\,\eta \equiv \overline{D}(\Lambda)\eta$
- Paritätstransformation: $\quad x = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to x' = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \vec{K} \to -\vec{K}, \quad \vec{J} \to \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} \leftrightarrow \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \xi \leftrightarrow \eta$$

- Dirac-Spinoren: $\quad \psi \equiv \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}$
  - eigent. Lorentz-Transf.: $\quad \psi \to \begin{pmatrix} \overline{D}(\Lambda) & 0 \\ 0 & D(\Lambda) \end{pmatrix} \psi$
  - Parität: $\quad \psi \to \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \psi$

Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- reiner Lorentz-Boost auf ein ruhendes Teilchen:

$$\phi_R(\vec{p}) = \exp(\tfrac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\phi})\,\phi_R(0) = \frac{E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\,\phi_R(0)$$

$$\phi_L(\vec{p}) = \exp(-\tfrac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\phi})\,\phi_L(0) = \frac{E+m-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\,\phi_L(0)$$

Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- reiner Lorentz-Boost auf ein ruhendes Teilchen:

$$\phi_R(\vec{p}) = \exp(\tfrac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\phi})\,\phi_R(0) = \frac{E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\,\phi_R(0)$$

$$\phi_L(\vec{p}) = \exp(-\tfrac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\phi})\,\phi_L(0) = \frac{E+m-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\,\phi_L(0)$$

- Annahme: $\phi_R(0) = \phi_L(0)$

$$\Rightarrow \quad m\,\phi_R(\vec{p}) = (E+\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\phi_L(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad m\,\phi_L(\vec{p}) = (E-\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\phi_R(\vec{p})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -m & p_0-\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ p_0+\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L(\vec{p}) \\ \phi_R(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\gamma^\mu p_\mu - m)\,\psi(p) = 0$$ Dirac-Gleichung im Impulsraum!

Gamma-Matrizen: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}$

Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- reiner Lorentz-Boost auf ein ruhendes Teilchen:

$$\phi_R(\vec{p}) = \exp(\tfrac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\phi})\,\phi_R(0) = \frac{E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\,\phi_R(0)$$

$$\phi_L(\vec{p}) = \exp(-\tfrac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\phi})\,\phi_L(0) = \frac{E+m-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\,\phi_L(0)$$

- Annahme: $\phi_R(0) = e^{i\alpha}\phi_L(0)$

$$\Rightarrow \quad m\,\phi_R(\vec{p}) = e^{i\alpha}(E+\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\phi_L(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad m\,\phi_L(\vec{p}) = e^{-i\alpha}(E-\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\phi_R(\vec{p})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -m & e^{-i\alpha}(p_0-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) \\ e^{i\alpha}(p_0+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L(\vec{p}) \\ \phi_R(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\gamma^\mu p_\mu - m)\,\psi(p) = 0$$ Dirac-Gleichung im Impulsraum!

Gamma-Matrizen: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha} \\ e^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha}\sigma^k \\ e^{i\alpha}\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$

Weyl-Gleichung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Spezialfall $m = 0$: $$\begin{pmatrix} 0 & p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L(\vec{p}) \\ \phi_R(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0 \,, \qquad p_0 = |\vec{p}|$$

$\Rightarrow \quad \vec{\sigma} \cdot \hat{p}\, \phi_R = +\phi_R, \quad \vec{\sigma} \cdot \hat{p}\, \phi_L = -\phi_L$ Weyl-Gleichungen

  - ϕ_R: rechtshändiger Spinor (Spin parallel zum Impuls)
  - ϕ_L: linkshändiger Spinor (Spin antiparallel zum Impuls)