Lorentz-invariante Feldgleichungen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Lorentz-invariante Feldgleichungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Forderung:

  Relativistische Feldgleichungen müssen forminvariant unter Lorentz-Transformationen sein.

Lorentz-invariante Feldgleichungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Forderung:

  Relativistische Feldgleichungen müssen forminvariant unter Lorentz-Transformationen sein.

- aktive Lorentz-Transformation: $x \to x' = \Lambda x$

- Skalarfelder:
  - ursprünglicher Wert $\phi(x)$ wird nun an der Stelle $x' = \Lambda x$ gemessen

    $$\phi'(x') = \phi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1} x)$$

  - Klein-Gordon-Gl.: $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\, \phi(x) = 0 \;\Rightarrow\; (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\, \phi'(x) = 0 \quad \checkmark$

Lorentz-invariante Feldgleichungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Forderung:

  Relativistische Feldgleichungen müssen forminvariant unter Lorentz-Transformationen sein.

- aktive Lorentz-Transformation: $x \to x' = \Lambda x$

- Skalarfelder:
  - ursprünglicher Wert $\phi(x)$ wird nun an der Stelle $x' = \Lambda x$ gemessen

    $$\phi'(x') = \phi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1} x)$$

  - Klein-Gordon-Gl.: $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\,\phi(x) = 0 \;\Rightarrow\; (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\,\phi'(x) = 0 \quad \checkmark$

- Vektorfelder: $V^\mu(x) \to V'^\mu(x) = \Lambda^\mu_{\ \nu} V^\nu(\Lambda^{-1} x)$

Lorentz-invariante Feldgleichungen

- Forderung:

  Relativistische Feldgleichungen müssen forminvariant unter Lorentz-Transformationen sein.
- aktive Lorentz-Transformation: $x \rightarrow x' = \Lambda x$
- Skalarfelder:
  - ursprünglicher Wert $\phi(x)$ wird nun an der Stelle $x' = \Lambda x$ gemessen

    $$\phi'(x') = \phi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1} x)$$
  - Klein-Gordon-Gl.: $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\,\phi(x) = 0 \Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\,\phi'(x) = 0 \quad \checkmark$
- Vektorfelder: $V^\mu(x) \rightarrow V'^\mu(x) = \Lambda^\mu_{\ \nu} V^\nu(\Lambda^{-1} x)$
- Ansatz für n-komponentige Felder: $\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = M(\Lambda)\Phi(\Lambda^{-1} x)$
  - $M(\Lambda)$: $n \times n$-Matrix mit $M(\Lambda'') = M(\Lambda')M(\Lambda)$, falls $\Lambda'' = \Lambda'\Lambda$

    $\hat{=}$ n-dim. Darstellung der Lorentz-Gruppe

Darstellungen der Rotationsgruppe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rotation im 3-dim. Raum: $\vec{x} \to \vec{x}\,' = R\vec{x}, \; R \in SO(3) \quad (RR^T = \mathbb{1}, \det R = 1)$

Darstellungen der Rotationsgruppe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rotation im 3-dim. Raum: $\vec{x} \to \vec{x}\,' = R\vec{x}, \;\; R \in SO(3) \;\; (RR^T = \mathbb{1}, \det R = 1)$
- Drehung um die z-Achse: $R = R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - infinitesimaler Drehwinkel: $R_z(\delta\theta) = \mathbb{1} - i\delta\theta\, J_z$
  - Generator: $J_z = i\, \frac{dR_z}{d\theta}\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - endlicher Drehwinkel: $R_z(\theta) = \lim\limits_{N\to\infty} \left(\mathbb{1} - i\frac{\theta}{N}\, J_z\right)^N = \exp(-i\theta J_z)$

Darstellungen der Rotationsgruppe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rotation im 3-dim. Raum: $\vec{x} \to \vec{x}\,' = R\vec{x}, \;\; R \in SO(3) \quad (RR^T = \mathbb{1}, \det R = 1)$
- Drehung um die z-Achse: $R = R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - infinitesimaler Drehwinkel: $R_z(\delta\theta) = \mathbb{1} - i\delta\theta\, J_z$
  - Generator: $J_z = i \left.\frac{dR_z}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - endlicher Drehwinkel: $R_z(\theta) = \lim\limits_{N\to\infty} \left(\mathbb{1} - i\frac{\theta}{N} J_z\right)^N = \exp(-i\theta J_z)$
- Drehung um beliebige Achse: $R(\vec{\theta}) = R(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{J})$
  - $J^3 \equiv J_z\,; \quad J^1 \equiv J_x$ und $J^2 \equiv J_y$ analog

Darstellungen der Rotationsgruppe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Vertauschungsrelationen ("Lie-Algebra" der Gruppe): $[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k$
  - $\hat{=}$ Drehimpulse in der QM
  - $n \times n$-Matrizen im Einklang mit der Lie-Algebra
    $\leftrightarrow$ n-dim. Darstellung der Rotationsgruppe
  - QM: $n = 2j + 1$ mit j ganz- oder halbzahlig

Darstellungen der Rotationsgruppe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Vertauschungsrelationen ("Lie-Algebra" der Gruppe): $[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k$
  - $\hat{=}$ Drehimpulse in der QM
  - $n \times n$-Matrizen im Einklang mit der Lie-Algebra

    $\leftrightarrow$ n-dim. Darstellung der Rotationsgruppe
  - QM: $n = 2j + 1$ mit j ganz- oder halbzahlig
- Spin-$\frac{1}{2}$: $j = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 2$
  - Generatoren: $J^k = \frac{\sigma^k}{2}$, σ^k: Pauli-Matrizen
  - Gruppenelemente: $U(\theta) = \exp\left(-i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right)$

    $U \in SU(2)$ $(U^\dagger U = \mathbb{1},\ \det U = 1)$; gleiche Lie-Algebra wie $SO(3)$
  - Felder: $\xi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \xi_1(\vec{x}) \\ \xi_2(\vec{x}) \end{pmatrix}$ (Pauli-Spinoren)

    Verhalten unter Rotationen: $\xi(\vec{x}) \to \xi'(\vec{x}) = U\,\xi(R^{-1}\vec{x})$

Darstellungen der Lorentzgruppe

- Lorentz-Boost entlang der x-Achse: $x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow x' = B_x(\phi)\, x$

  - $$B_x(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - Rapidität: $\phi = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} \;\Rightarrow\; \cosh\phi = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \sinh\phi = \gamma v$