Der Klein-Gordon-Propagator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Der Klein-Gordon-Propagator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Green'sche Funktion des Klein-Gordon-Operators:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G(x - y) = -i\delta^4(x - y)$$

Der Klein-Gordon-Propagator

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Green'sche Funktion des Klein-Gordon-Operators:

  $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G(x-y) = -i\delta^4(x-y)$

- Fourier-Transformation: $G(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4)} \, e^{-ip\cdot(x-y)} \, \tilde{G}(p)$

  $\Rightarrow \quad \tilde{G}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}$

  $\rightarrow$ Pole bei $p^2 = m^2 \quad \Leftrightarrow \quad p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} \equiv \pm E_{\vec{p}}$

  $\rightarrow$ infinitesimale Verschiebung in die komplexe Ebene

Der Klein-Gordon-Propagator

- retardierter Propagator: $p_0 \to p_0 + i\varepsilon$

$$\Rightarrow \; G(x-y) \;\to\; D_R(x-y) = \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left(e^{-ip\cdot x} - e^{ip\cdot x}\right)\Big|_{p_0 = E_{\vec{p}}}$$

$$= \theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)]$$

- avancierter Propagator: $p_0 \to p_0 - i\varepsilon$

$$\to \; D_A(x-y) = \theta(y^0 - x^0)[\phi(y), \phi(x)]$$

- Feynman Propagator: $E_{\vec{p}} \to E_{\vec{p}} - i\varepsilon$

$$\to \; D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4)} e^{-ip\cdot(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

$$= \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle$$

$$\equiv \langle 0|T\,\phi(x)\phi(y)|0\rangle \qquad T: \text{ Zeitordnungsoperator}$$

Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ansatz Dirac: $E\psi = \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m\right) \psi \ , \quad \alpha^k, \beta = const.$

Dirac-Gleichung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Ansatz Dirac: $E\psi = \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m\right)\psi$, $\alpha^k, \beta = const.$
- Forderung: $E^2\,\psi \stackrel{!}{=} \left(\vec{p}^{\,2} + m^2\right)\psi$

$\Rightarrow$ α^k und β sind Matrizen mit $\{\alpha^k, \alpha^\ell\} = 2\delta^{k\ell}$, $\{\alpha^k, \beta\} = 0$, $\beta^2 = \mathbb{1}$.

  - kleinst-mögliche Dimension: $n = 4$

$$\Rightarrow \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}$$ "Dirac-Spinor"

Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ansatz Dirac: $E\psi = \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m\right)\psi\ ,\quad \alpha^k, \beta = const.$
- Forderung: $E^2\,\psi \stackrel{!}{=} \left(\vec{p}^{\,2} + m^2\right)\psi$

$\Rightarrow\ \alpha^k$ und β sind Matrizen mit $\quad \{\alpha^k, \alpha^\ell\} = 2\delta^{k\ell}, \quad \{\alpha^k, \beta\} = 0, \quad \beta^2 = \mathbb{1}\ .$

  - kleinst-mögliche Dimension: $n = 4$

$$\Rightarrow\ \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}$$ “Dirac-Spinor”

- Def.: $\gamma^0 \equiv \beta,\ \ \gamma^k \equiv \beta\alpha^k \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0}$ Dirac-Gleichung
  - $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\,\mathbb{1}$

Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ansatz Dirac: $E\psi = \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m\right) \psi \;, \quad \alpha^k, \beta = const.$
- Forderung: $E^2 \psi \stackrel{!}{=} \left(\vec{p}^{\,2} + m^2\right) \psi$

  $\Rightarrow$ α^k und β sind Matrizen mit $\{\alpha^k, \alpha^\ell\} = 2\delta^{k\ell}, \quad \{\alpha^k, \beta\} = 0, \quad \beta^2 = \mathbb{1}\;.$

  - kleinst-mögliche Dimension: $n = 4$

$$\Rightarrow \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \qquad \text{“Dirac-Spinor”}$$

- Def.: $\gamma^0 \equiv \beta, \;\; \gamma^k \equiv \beta\alpha^k \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi = 0}$ Dirac-Gleichung
  - $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\,\mathbb{1}$
- Feynman-Slash: $\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(i\not{\partial} - m\right) \psi = 0}$

Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- "chirale Darstellung" (= "Weyl-Darst.", wird in dieser Vorlesung verwendet):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observable hängen nicht von der gewählten Darstellung ab!

Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- “chirale Darstellung” (= “Weyl-Darst.”, wird in dieser Vorlesung verwendet):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observable hängen nicht von der gewählten Darstellung ab!

- Def.: $\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ “adjungierter Spinor”

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{\psi}(\overleftarrow{\not\partial} - m) \equiv -i\partial_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu - m\overline{\psi} = 0} \quad \text{“adjungierte Gleichung”}$$