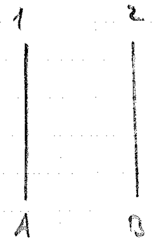
Beispiel.

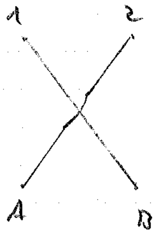
Störungsentwicklung von ${}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T\{\exp(-i\int dt\, H_I(t))\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0$ in ϕ^4-Theorie

0. Ordnung:

$$ {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 = 4\sqrt{E_1 E_2 E_A E_B}\, \langle 0 | a_1\, a_2\, a_A^\dagger\, a_B^\dagger | 0 \rangle $$

$$ = 4 E_A E_B (2\pi)^6 \{ \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_A)\, \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{p}_B) + \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_B)\, \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{p}_A) \} $$

$\hat{=}$ 

\+ 

nicht verbunden

→ kein Beitrag zu T

1. Ordnung:

$$ {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T\left(-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\, \phi_I^4(x)\right) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 $$

$$ = {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N\left\{-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\, \phi_I^4(x) + \text{Kontraktionen}\right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 $$

Beachte: äußere Zustände $\neq |0\rangle$

⇒ Beiträge unkontrahierter Operatoren verschwinden nicht automatisch

$$ \phi_I = \phi_I^{(+)} + \phi_I^{(-)}, \quad N \rightsquigarrow {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi_I^{(-)} \dots \phi_I^{(+)} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 $$

$$ \phi_I^{(+)}(x) | \vec{p} \rangle_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}}\, a_{\vec{k}}\, e^{-ik\cdot x} \sqrt{2E_p}\, a_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle = e^{-ip\cdot x} | 0 \rangle $$

$$ {}_0\langle \vec{p} | \phi_I^{(-)}(x) = \langle 0 | e^{ip\cdot x} $$

2) Definiere Kontraktionen mit Zuständen:

$$\overbracket{\phi_I(x)\,|\vec p\rangle_0} = e^{-ip\cdot x}|0\rangle \,, \qquad \overbracket{{}_0\langle\vec p\,|\,\phi_I(x)} = \langle 0|\,e^{ip\cdot x}$$

⇒ nichtverschwindende Erwartungswerte
= vollständige Kontraktionen von Operatoren <u>und</u> Zuständen

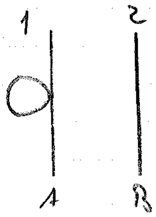
unser Beispiel:

$$T\phi^4 = N\big(\underset{A}{\phi\phi\phi\phi} + 12\,\underset{B}{\overbracket{\phi\phi}\phi\phi} + 3\,\underset{C}{\overbracket{\phi\phi}\,\overbracket{\phi\phi}}\big)$$

$$C \rightsquigarrow {}_0\langle\vec p_1\vec p_2|\,\overbracket{\phi\phi}\;\overbracket{\phi\phi}\,|\vec p_A\vec p_B\rangle_0 + (\vec p_A\longleftrightarrow\vec p_B)$$

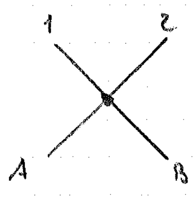
$\hat{=}\ 8\cdot$  kein Beitrag zu T

$$B \rightsquigarrow {}_0\langle\vec p_1\vec p_2|\,\overbracket{\phi\phi}\,\phi\phi\,|\vec p_A\vec p_B\rangle_0 + \ldots$$

$\hat{=}$  $+ \ldots$ " " " T
(nicht vollst. verbunden)

⇒ Nur A trägt zu T bei:

$${}_0\langle\vec p_1\vec p_2|\,\phi\phi\phi\phi\,|\vec p_A\vec p_B\rangle_0 \quad \hat{=}$$



$$\rightsquigarrow 4!\left(-i\frac{\lambda}{4!}\right)\int d^4x\; e^{-i(p_A+p_B-p_1-p_2)\cdot x}$$

$$= -i\lambda\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_A+p_B-p_1-p_2) = i\mathcal{M}\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_A+p_B-p_1-p_2)$$

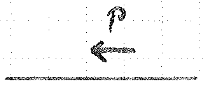
$\Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{M} = -\lambda}}$ (in 1. Ordnung Störungstheorie)

Feynman-Regeln für die invariante Amplitude

(ϕ^4-Theorie, Impulsraum)

$i\mathcal{M}$ = Σ verbundene amputierte Diagramme

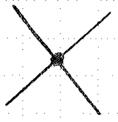
mit

1.) Propagator: 

$\hat{=} \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}$ (interne Linien)

2.) externe Linien: 

$\hat{=}$ 1

3.) Vertex: 
$\hat{=}$ $-i\lambda$

4.) Viererimpulserh. an jedem Vertex

5.) Integriere über alle unbestimmten Impulse

6.) Teile durch Symmetriefaktor

V. 7 Feynman-Regeln für Fermionen

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s \Big(\underset{\underset{\psi^{(+)}}{\updownarrow}}{a^s_{\vec p}\, u^s(\vec p)\, e^{-ip\cdot x}} + \underset{\underset{\psi^{(-)}}{\updownarrow}}{b^{s\dagger}_{\vec p}\, v^s(\vec p)\, e^{ip\cdot x}} \Big)$$

$$\bar\psi(x) = \qquad \underset{\underset{\bar\psi^{(-)}}{\updownarrow}}{a^\dagger\, \bar u\, e^{ip\cdot x}} \qquad \underset{\underset{\bar\psi^{(+)}}{\updownarrow}}{b\, \bar v\, e^{-ip\cdot x}}$$

Hauptunterschied zu Bosonen:
Minuszeichen bei Vertauschungen

- zeitgeordnetes Produkt:

$$T\{\psi(x)\,\bar\psi(y)\} = \begin{cases} \psi(x)\,\bar\psi(y) & \text{für } x^0 > y^0 \\ -\bar\psi(y)\,\psi(x) & \text{"} \quad y^0 > x^0 \end{cases}$$

(wie gehabt)

$T\{\psi\psi\}$, $T\{\bar\psi\bar\psi\}$, mehr Felder analog

- Normalordnung: ebenfalls Minuszeichen bei Vertauschungen

z.B. $N(a_{\vec p}\, a_{\vec q}^\dagger) = -\,a_{\vec q}^\dagger\, a_{\vec p}$

$$N(a_{\vec p}\, a_{\vec q}\, a_{\vec r}^\dagger) = (-1)^2\, a_{\vec r}^\dagger\, a_{\vec p}\, a_{\vec q} = (-1)^3\, a_{\vec r}^\dagger\, a_{\vec q}\, a_{\vec p}$$

- Kontraktionen:

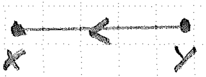
$$\overbracket{\psi(x)\,\bar\psi(y)} := \left\{ \begin{array}{ll} \{\psi^{(+)}(x), \bar\psi^{(-)}(y)\} & \text{für } x^0 > y^0 \\ -\{\bar\psi^{(+)}(y), \psi^{(-)}(x)\} & \text{"} \quad y^0 > x^0 \end{array} \right\} = S_F(x-y)$$

$$\overbracket{\psi(x)\,\psi(y)} = \overbracket{\bar\psi(x)\,\bar\psi(y)} = 0$$

$$\overbracket{\bar\psi(x)\,\psi(y)} = -\,\overbracket{\psi(y)\,\bar\psi(x)} = -\,S_F(y-x)$$

2, Fermion-Propagatoren haben eine „Richtung" (vom $\bar\psi$ zum ψ):

$S_F(x-y) =$



- mehrere Operatoren:

$$N(\overbracket{\psi_1\,\psi_2\,\bar\psi_3}\,\bar\psi_4) = -\,\overbracket{\psi_1\,\bar\psi_3}\,N(\psi_2\,\bar\psi_4)$$

- Wick'sches Theorem:

(mit den obigen Definitionen wie gehabt)

$$T\left[\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \dots\right] = N\left[\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \dots + \text{alle mgl. Kontr.}\right]$$

$$\left(\Rightarrow \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) | 0 \rangle = \langle 0 | \overbrace{\psi(x) \bar{\psi}(y)} | 0 \rangle = S_F(x-y) \langle 0 | 0 \rangle \checkmark \right)$$

- Kontraktion mit Zuständen:

$$\overbrace{\psi(x) | \vec{p}}, s \rangle_a = \overbrace{\psi(x) \sqrt{2E_p}\, a}{}_{\vec{p}}^{s\dagger} | 0 \rangle = u^s(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} | 0 \rangle$$

$${}_b\langle \overbrace{\vec{p}, s | \psi}(x) = \langle 0 | v^s(\vec{p})\, e^{ip\cdot x}$$

und analog für $\bar{\psi}$

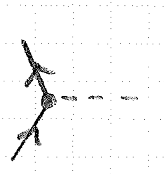
⇒ externe Linien in T-Matrix-Elementen:

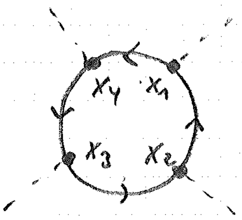
- einlaufendes Fermion $\quad \cdots \underset{p}{\longleftarrow} \; = u^s(\vec{p})$
- auslaufendes " $\quad \underset{p}{\longleftarrow} \cdots \; = \bar{u}^s(\vec{p})$
- einl. Anti-Fermion $\quad \cdots \underset{\overleftarrow{p}}{\longrightarrow} \; = \bar{v}^s(\vec{p})$
- ausl. " $\quad \underset{\overleftarrow{p}}{\longrightarrow} \cdots \; = v^s(\vec{p})$

- einfachste WW mit skalarem Feld ϕ:

$$\mathcal{L}_{WW} = -g\, \bar{\psi}(x)\, \psi(x)\, \phi(x) \qquad \text{(Yukawa-Theorie)}$$

Quantisierungsregel: ψ und ϕ vertauschen

Vertizes:  $\hat{=}\; -ig$ (→ Übung) geschlossener Fermion-Loop: (a, b, c, d: Spinor-Indizes)



$$\sim \bar{\psi}_a(x_1)\,\psi_a(x_1)\,\bar{\psi}_b(x_2)\,\psi_b(x_2)\,\bar{\psi}_c(x_3)\,\psi_c(x_3)\,\bar{\psi}_d(x_4)\,\psi_d(x_4)$$

$$= -S_{F_{da}}(x_4-x_1)\,S_{F_{ab}}(x_1-x_2)\,S_{F_{bc}}(x_2-x_3)\,S_{F_{cd}}(x_3-x_4)$$

$$= -\mathrm{tr}\left[S_F(x_4-x_1)\,S_F(x_1-x_2)\,S_F(x_2-x_3)\,S_F(x_3-x_4)\right]$$

2) allgemeine Regel für geschlossene Fermion-Loops
- Spur im Dirac-Raum
- zusätzliches Minus-Zeichen

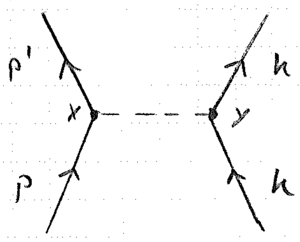
- Sei $|\vec{p},\vec{k}\rangle \sim a^\dagger_{\vec{p}}\,a^\dagger_{\vec{k}}\,|0\rangle$

$$\Rightarrow \psi(x)\,\psi(y)\,|\vec{p},\vec{k}\rangle \sim \psi(x)\,\psi(y)\,a^\dagger_{\vec{p}}\,a^\dagger_{\vec{k}}\,|0\rangle = (\psi(x)|\vec{k}\rangle)(\psi(y)|\vec{p}\rangle)$$

$$\psi(x)\,\psi(y)\,|\vec{p},\vec{k}\rangle \sim -\psi(x)\,\psi(y)\,a^\dagger_{\vec{k}}\,a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle = -(\psi(x)|\vec{p}\rangle)(\psi(y)|\vec{k}\rangle)$$

und analog für auslaufende Teilchen

Konsequenz:
zusätzliches relatives Minuszeichen zwischen den Diagrammen



und