



Was passiert mit dem $\lim_{\epsilon \rightarrow (1-i\epsilon)\infty}$?

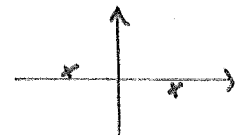
z. B.  = $\frac{1}{2}(-i\pi) \lim_{\epsilon \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dz^0 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dz^1 \mathcal{D}_F(x-z) \mathcal{D}_F(y-z) \mathcal{D}_F(0)$

$\sim \lim_{\epsilon \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dz^0 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dz^1 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i(p_1+p_2)\cdot z} \frac{1}{p_1^2 - m^2 + i\eta} \frac{1}{p_2^2 - m^2 + i\eta}$

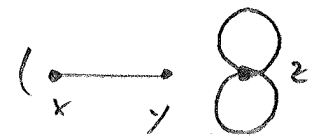
2) $\lim_{\epsilon \rightarrow (1-i\epsilon)\infty} e^{\pm i p_i^0 \epsilon} = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{\pm i p_i^0 T} e^{\pm p^0 \epsilon T}$ divergiert an der oberen oder unteren Grenze

2) $(1-i\epsilon) p_i^0$ sollte besser reell sein!

2) Integriere  mit $p^0 \sim (1+i\epsilon)$

- kompatibel mit der Feynman-Randbed. 
- Bei der Integration entlang der „gedrehten“ p^0 -Richtung könnte man das $i\eta$ im Propagator auch weglassen. In der Regel kann man dagegen auch das $i\eta$ im Propagator beibehalten und über reelle p^0 und z^0 integrieren.

Unverbundene Diagrammteile:

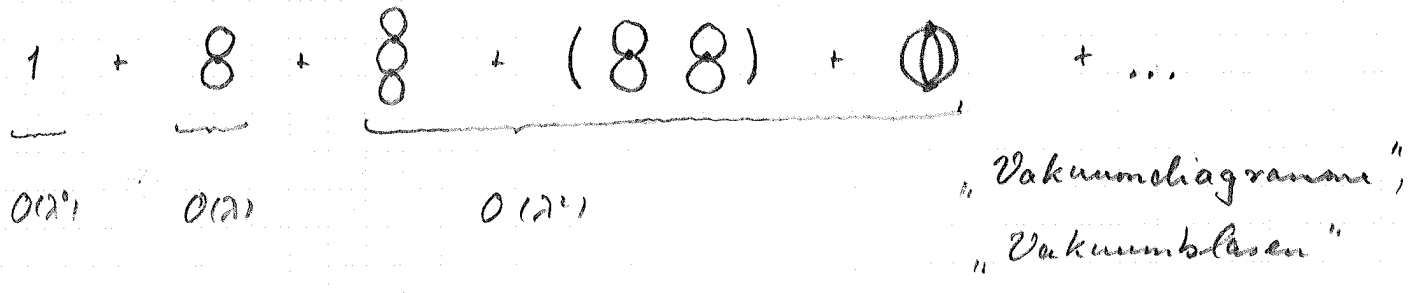
z. B.  = $\mathcal{D}_F(x-y) * \text{tadpole}$

$\text{tadpole} = \frac{1}{S} \int d^4 z \mathcal{D}_F(0) (-i\pi) \mathcal{D}_F(0) = \frac{-i\pi}{S} \mathcal{D}_F^2(0) \int_{V_4} d^4 z$
 $V_4 \rightarrow \infty$

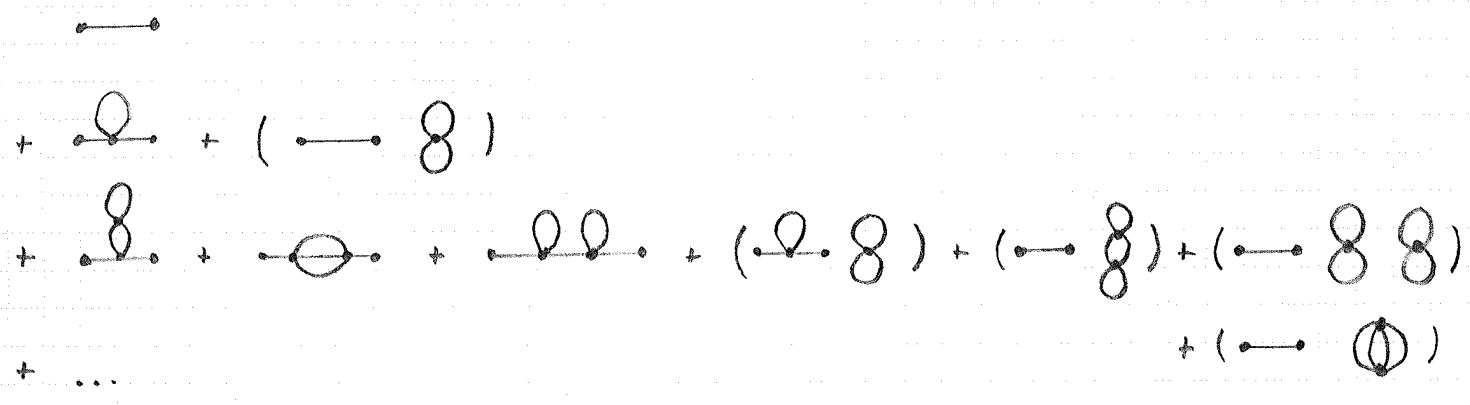
Wir hatten (\rightarrow V-11)

$$\langle \Omega | T \{ \phi \phi \} | \Omega \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I \phi_I e^{-i \int dt \epsilon H_I} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T e^{-i \int dt \epsilon H_I} | 0 \rangle}$$

Nenner:



Zähler:



$$= \text{tadpole} \times [1 + \text{self-energy loop} + \text{self-energy loop with tadpole} + (\text{self-energy loop with self-energy loop}) + \text{vacuum bubble} + \dots]$$

$$+ \text{tadpole with loop} \times [1 + \text{self-energy loop} + \dots]$$

$$+ \dots$$

detaillierte Rechnung:

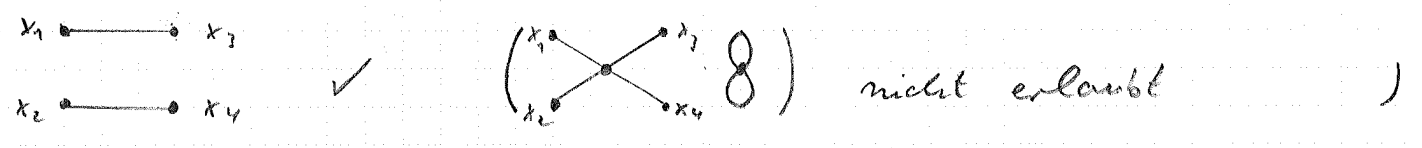
Die Vakuumdiagramme kürzen sich exakt heraus.

\Rightarrow Nur die verbundenen Diagramme tragen bei.

allgemein:

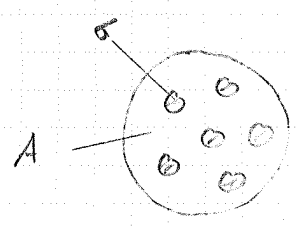
$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \sum \left(\begin{array}{l} \text{verbundene Feynmandiagramme} \\ \text{mit externen Punkten } x_1, \dots, x_n \end{array} \right)$$

(„verbunden“ = keine Faktoren mit Vakuumblasen,
 nicht notwendig untereinander verbunden:



V. 5 Wirkungsquerschnitte

klassisch - anschauliches Bild des Wirkungsquerschnitts:



N_A Target-Teilchen jeweils mit Querschnittsfläche σ werden von N_B punktförmigen Projektileilchen beschossen, die gleichmäßig über eine Fläche A verteilt sind.

=> Zahl der Treffer: $N = \frac{N_A \sigma}{A} \cdot N_B$

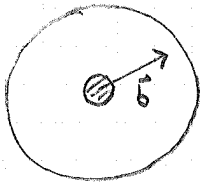
Verallgemeinerte Definition:

Wirkungsquerschnitt $\sigma = \frac{N A}{N_A N_B} \equiv \frac{N}{N_A n_B}$

N = Zahl der „interessanten Ereignisse“

$n_B = \frac{N_B}{A}$ = Flächendichte der Projektileilchen

nur ein Target-Teilchen im Zentrum des Strahls:



$$N_A = 1$$

$P(\vec{b}) =$ Ereigniswahrscheinlichkeit für ein Projektilteilchen mit Stoßparameter \vec{b}

$$\Rightarrow N = \int d^2b n_B P(\vec{b}) = n_B \int d^2b P(\vec{b}) \quad (\text{für } n_B = \text{const.})$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \int d^2b P(\vec{b})} \quad (N_A = 1, n_B = \text{const.})$$

QFT: Beschreibe ein- und auslaufende Teilchen durch Wellenpakete:

$$|\phi_i\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \phi_i(\vec{k}) |\vec{k}\rangle$$

↑
Fouriertransf.
der Ortswellenfkt.

$|\vec{k}\rangle =$ Ein-Teilchen-Impuls-Zustand der relativistischen Quantenmechanik

(mit. W. Theorie $|\vec{k}\rangle = \sqrt{2E_k} a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle$)

Normierung:

$$\langle \phi_i | \phi_i \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\phi_i(\vec{k})|^2 = 1$$

Betrachte Prozess $A + B \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$

Annahme:

Die ein- und auslaufenden Wellenpakete sind räumlich lokalisiert, so dass sie zur Zeit $-\infty$ bzw. $+\infty$ als unabhängige Ein-Teilchen-Zustände konstruiert werden können.

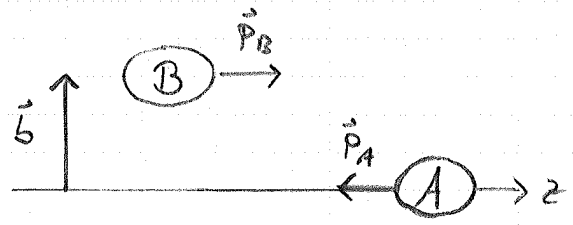
2) Übergangswahrscheinlichkeit:

$$P = \left| \text{out} \langle \phi_1 \dots \phi_m \mid \phi_A \phi_B \rangle_{\text{in}} \right|^2$$

↑
↓
 Endzustand, zur Zeit $t \rightarrow \infty$ gemessen Anfangszustand, zur Zeit $t \rightarrow -\infty$ präpariert

$$\mid \phi_A \phi_B \rangle_{\text{in}} = \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_B}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_A 2E_B}} \phi_A(\vec{k}_A) \phi_B(\vec{k}_B) e^{-i\vec{b} \cdot \vec{k}_B} \mid \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_{\text{in}}$$

Dabei seien $\phi_A(\vec{k}_A)$ und $\phi_B(\vec{k}_B)$ so gewählt, dass die Erwartungswerte der einlaufenden Impulse $\vec{p}_A = \langle \vec{k}_A \rangle$ und $\vec{p}_B = \langle \vec{k}_B \rangle$ parallel zur z-Richtung sind und die Erwartungswerte der Ortsraumwellenfunktion auf der z-Achse liegen. Der zusätzliche Faktor $e^{-i\vec{b} \cdot \vec{k}_B}$ verschiebt dann das Projektilwellenpaket in transversale Richtung



$$\text{out} \langle \phi_1 \dots \phi_m \mid = \frac{1}{\sqrt{2E_1 \dots 2E_m}} \text{out} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m \mid \quad (\text{"scharfe" Impulszustände})$$

2) diff. Übergangswahrscheinlichkeit:

$$dP = \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \left| \text{out} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m \mid \phi_A \phi_B \rangle_{\text{in}} \right|^2$$

2, diff WR:

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= \int d^2b \, dP \\
 &= \int d^2b \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \left(\prod_{i=A,B} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3 k'_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\vec{k}'_i)}{\sqrt{2E'_i}} \right) \\
 &\quad \times e^{i\vec{b} \cdot (\vec{k}'_B - \vec{k}_B)} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_{in} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | \vec{k}'_A \vec{k}'_B \rangle_{in}^*
 \end{aligned}$$

zentrales Objekt:

$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_{in} \equiv \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | S | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle$$

$\begin{matrix} \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\ \text{Zust. mit def.} & & \dots & & \text{Zustände mit def.} & & \\ \text{Impulsen zur} & & & & \text{Impulsen zu einer} & & \\ \text{Zeit } t \rightarrow \infty & & & & \text{beliebigen gemeinsamen} & & \\ & & & & \text{Referenzzeit} & & \end{matrix}$

S-Matrix: unitärer Operator mit $S = \mathbb{1}$, falls $H_{int} = 0$

$$\Rightarrow S = \mathbb{1} + iT, \quad T: \text{„T-Matrix“}$$

globale Viererimpulserhaltung:

$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | iT | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle = \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum_f p_f)}_{\text{Kinematik}} i \underbrace{\mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_1, \dots, p_n)}_{\text{Dynamik}}$$

• \mathcal{M} : „invariantes Matrixelement“

- Lorentz-invariant

- kann störungstheoretisch mit Hilfe von

Feynman-Diagrammen berechnet werden (s.u.)

• alle externen Viererimpulse „on-shell“: $p_i^0 = \sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2}$