V.3 Das Wick'sche Theorem

Ziel: möglichst einfache Berechnung von Ausdrücken der Form

$$\langle 0 | T\{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \} | 0 \rangle$$

Notation: ab jetzt alle Felder im WW-Bild

→ lasse Index I weg

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec p}\, e^{-ip\cdot x} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a^\dagger_{\vec p}\, e^{ip\cdot x}$$

$$\Rightarrow \phi^{(+)}(x)|0\rangle = 0 = \langle 0 | \phi^{(-)}(x)$$

$$\phi(x)\phi(y) = \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y)$$

$$= \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) + [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)]$$

$$\equiv N\{\phi(x)\phi(y)\} + [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)]$$

„normal-geordnetes Produkt":
Alle Erzeuger stehen links von den Vernichtern.

z.B. $N(a_{\vec p}\, a^\dagger_{\vec k}\, a_{\vec q}) \equiv \,:a_{\vec p}\, a^\dagger_{\vec k}\, a_{\vec q}:\, = a^\dagger_{\vec k}\, a_{\vec p}\, a_{\vec q}$

$\Rightarrow \langle 0 | N(\dots) | 0 \rangle = 0$, sofern $(\dots)$ keine Terme ohne Operatoren enthält

analog:

$$\phi(y)\phi(x) = N\{\phi(y)\phi(x)\} + [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)]$$

$$= N\{\phi(x)\phi(y)\} + [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)]$$

$$\Rightarrow \boxed{T\{\phi(x)\,\phi(y)\} = N\{\phi(x)\,\phi(y)\} + \overbracket{\phi(x)\,\phi(y)}}$$

mit

$$\overbracket{\phi(x)\,\phi(y)} := \begin{cases} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] & \text{für } x^0 > y^0 \\ [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)] & \text{"} \quad y^0 > x^0 \end{cases} \qquad (\text{„Kontraktion"})$$

Es gilt:

$$\overbracket{\phi(x)\phi(y)} = \mathcal{D}_F(x-y) \qquad (\rightsquigarrow \text{Übung})$$

$$\Big(\Rightarrow \langle 0|T\{\phi(x), \phi(y)\}|0\rangle = \underbrace{\langle 0|N\{\phi(x)\,\phi(y)\}|0\rangle}_{=0} + \mathcal{D}_F(x-y)\,\langle 0|0\rangle$$

$$= \mathcal{D}_F(x-y) \quad \checkmark \Big)$$

Verallgemeinerung: „Wick'sches Theorem"

$$\boxed{\begin{aligned} &T\{\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\} \\ &= N\{\phi(x_1)\ldots\phi(x_n) + \text{alle möglichen Kontraktionen}\} \end{aligned}}$$

<u>Beispiel:</u> vier unterschiedliche Punkte $x_1, \ldots, x_4$; $\phi_i \equiv \phi(x_i)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} = N\{&\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \\ &+ \overbracket{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 + \overbracket{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \overbracket{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \\ &+ \phi_1\overbracket{\phi_2\phi_3}\phi_4 + \phi_1\overbracket{\phi_2\phi_3\phi_4} + \phi_1\phi_2\overbracket{\phi_3\phi_4} \\ &+ \overbracket{\phi_1\phi_2}\,\overbracket{\phi_3\phi_4} + \overbracket{\phi_1\phi_2\phi_3}\!\!\!\!\!\!\underbracket{\phi_4}\; + \overbracket{\phi_1\overbracket{\phi_2\phi_3}\phi_4}\} \end{aligned}$$

wobei z.B. $N\{\overbracket{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4\} = \mathcal{D}_F(x_1-x_3)\,N\{\phi_2\phi_4\}$

Beweis des Wick'schen Theorems:
über vollständige Induktion ($n=2$ ✓ zeige: $n \Rightarrow n+1$)

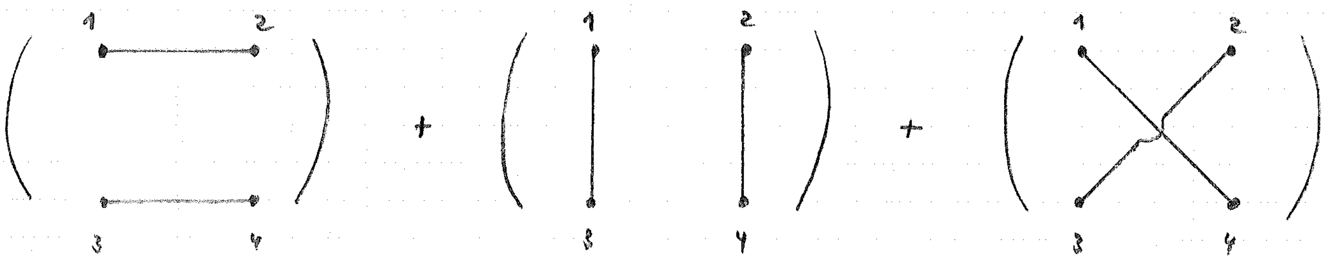
V. 4 Feynman-Diagramme

Aus dem obigen Beispiel folgt:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle$$

$$= D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3)$$

$\hat{=}$



interessanteres Beispiel:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \exp\left(-i \int dt\, H_I(t)\right) \} | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T \{ \underbrace{\phi(x) \phi(y)}_{\substack{D_F(x-y) \\ (=\text{ freier Propagator})}} + \phi(x)\phi(y) \underbrace{\left[-i \int dt\, H_I(t)\right]}_{\text{1. Ordnung Störungstheorie}} + \dots \} | 0 \rangle$$

ϕ^4-Theorie:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \left[-i \int dt\, H_I(t)\right] \} | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) (-i) \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi^4(z) \} | 0 \rangle$$

$$= \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z \, \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \phi(z) \phi(z) \phi(z) \phi(z) \} | 0 \rangle$$

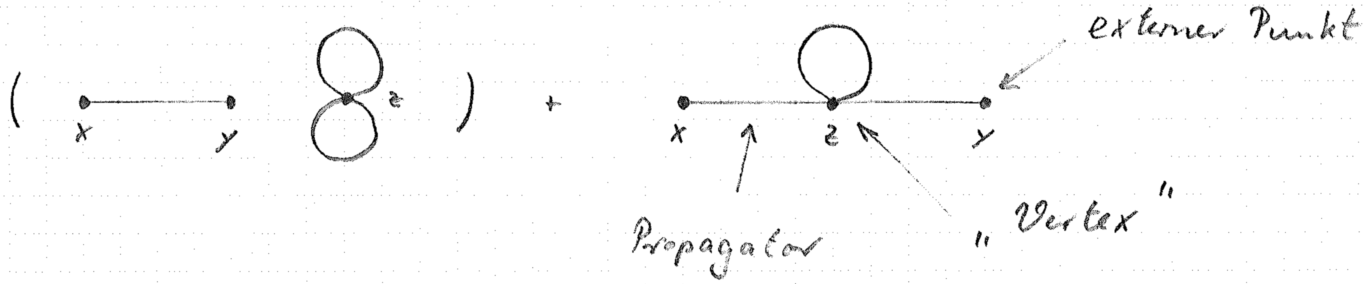
$$= \phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z)\,\phi(z)\,\phi(z)\,\phi(z) \cdot 3$$

$$+ \phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z)\,\phi(z)\,\phi(z)\,\phi(z) \cdot 4 \cdot 3$$

+ nicht vollständig kontrahierte Terme

$$= 3 \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) D_F(x-y) \int d^4z \, D_F(z-z)\, D_F(z-z)$$

$$+ 12 \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) \int d^4z \, D_F(x-z)\, D_F(y-z)\, D_F(z-z)$$

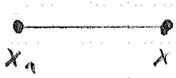
$\hat{=}$ 

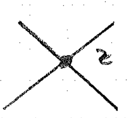
$\Rightarrow$ „Kochrezept":

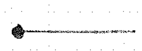
$$\langle 0 | T \{ \phi(x)\, \phi(y) \exp\left[-i \int dt\, H_I(t)\right] \} | 0 \rangle$$

= Summe aller Diagramme mit externen Punkten x und y

Feynman-Regeln zur Berechnung der Diagramme (in ϕ^4-Theorie)

1. Für jeden Propagator  $= D_F(x_1 - x_2)$

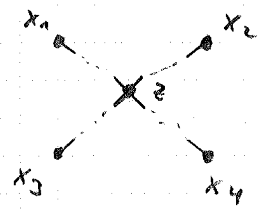
2. " " Vertex  $= (-i\lambda) \int d^4z$

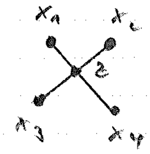
3. " " externen Punkt  $= 1$

4. Teile durch den Symmetriefaktor $S = \prod_i S_i$

Symmetriefaktor:

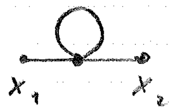
- Die Vertizes sind eigentlich jeweils mit einem Faktor $\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)\int d^4z$ verbunden. Andererseits gibt es z.B. $4!$ Möglichkeiten, einen Vertex mit vier verschiedenen Punkten zu verbinden:



$\rightarrow$ Lasse beide Faktoren $4!$ weg und werte 

als <u>ein</u> Diagramm.

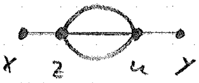
Es gibt jedoch Ausnahmen.

<u>Bsp. 1:</u> Verbinde $\times$ mit zwei Punkten zu 

$\rightarrow$ $4 \cdot 3$ Möglichkeiten

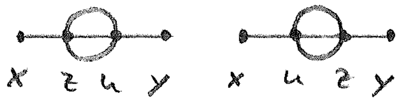
$\Rightarrow$ Symmetriefaktor $S = \frac{4!}{3 \cdot 4} = 2$

allgemein: jeweils ein Faktor $S_i = 2$ für jede Linie, die am gleichen Punkt beginnt und endet

<u>Bsp. 2:</u> Verbinde zwei Vertizes mit zwei Punkten zu 

$\rightarrow$ $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ Möglichkeiten $\Rightarrow S = \frac{(4!)^2}{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6$

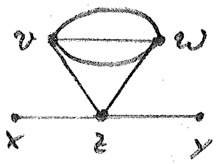
allgemein: jeweils ein Faktor $S_i = N!$, wenn N Linien die gleichen Punkte verbinden

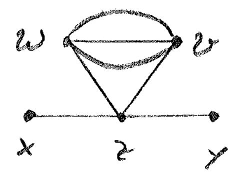
- n-te Ordnung Störungstheorie
  - Faktor $\frac{1}{n!}$ von der Exponentialfkt.
  - $n!$ Anordnungen der Vertizes, z.B. 

→ Lasse beide Faktoren weg

und werte 

als <u>ein</u> Diagramm

aber: 

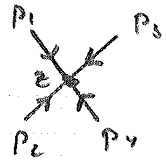
ist sowieso äquivalent zu 

⇒ Symmetriefaktor 2

allgemein: jeweils ein Faktor $S_i = N!$ für N äquivalente Vertizes

<u>Impulsraum:</u>

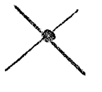
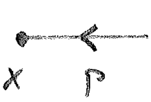
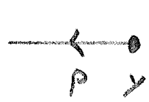
$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ip\cdot(x-y)}$$

⇒ 

$\sim \int d^4z \, e^{-ip_1\cdot z} e^{-ip_2\cdot z} e^{-ip_3\cdot z} e^{-ip_4\cdot z} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4)$

Viererimpulserhaltg.!

→ <u>Feynman-Regeln im Impulsraum:</u>

1. Propagator:  $= \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}$
2. Vertex:  $= -i\lambda$
3. externe Punkte:  $= e^{-ip\cdot x}$,  $= e^{ip\cdot y}$
4. Viererimpulserhaltung an jedem Vertex
5. Integration über alle unbestimmten Impulse $\int \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}$
6. Teile durch den Symmetriefaktor