i) $\phi(x)$

feste Zeit t_0 : (bisher meistens $t_0 = 0$)

$$\phi(t_0, \vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

(erfüllt wie zuvor die Quantisierungsregeln)

$$\Rightarrow \phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)}\, \phi(t_0, \vec{x})\, e^{-iH(t-t_0)}$$

Definiere: „ Wechselwirkungsbild - Feldoperator "

(WW - Bild: Zeitentw. der Operatoren mit H_0
" " Zustände " H_{WW})

$$\phi_I(t, \vec{x}) := \phi(t, \vec{x})\Big|_{\lambda=0}$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)}\, \phi(t_0, \vec{x})\, e^{-iH_0(t-t_0)}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger\, e^{ip\cdot x} \right)\Big|_{x^0 = t - t_0}$$

$\Rightarrow$ ϕ im Heisenberg - Bild: (wie zuvor)

$$\boxed{\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)}\, e^{-iH_0(t-t_0)}\, \phi_I(t, \vec{x})\, e^{iH_0(t-t_0)}\, e^{-iH(t-t_0)}}$$

$$\boxed{\equiv U^\dagger(t, t_0)\, \phi_I(t, \vec{x})\, U(t, t_0)}$$

mit $\boxed{U(t, t_0) := e^{iH_0(t-t_0)}\, e^{-iH(t-t_0)}}$ „ Zeitentwicklungs-operator "

(unitär)

$$\Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0)\, e^{-iH(t-t_0)}$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)}\, H_{WW}\, e^{-iH(t-t_0)}$$

$$= \underbrace{e^{iH_0(t-t_0)}\, H_{WW}\, e^{-iH_0(t-t_0)}}_{=:\, H_I(t)}\, U(t, t_0)$$

(WW - Hamiltonop. im WW - Bild)

→ DGl: $$i\frac{\partial}{\partial t} U(t,t_0) = H_I(t)\, U(t,t_0)$$

mit $$H_I = \int d^3x\, \frac{\lambda}{4!}\, \phi_I^4$$

Anfangsbedingung: $U(t_0,t_0) = 1$

Lösung:

$$U(t,t_0) = 1 + (-i)\int_{t_0}^{t} dt_1\, H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, H_I(t_1) H_I(t_2)$$
$$+ \dots$$

(Beweis: einfach nach t ableiten)

Die Operatoren $H_I(t_i)$ sind zeitgeordnet (für $t \geq t_0$)

2, $$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)$$
$$= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \dots \int_{t_0}^{t} dt_n\, T\{H_I(t_1)\dots H_I(t_n)\} = T\,\frac{1}{n!}\left(\int_{t_0}^{t} dt'\, H_I(t')\right)^n$$

(z.B. $$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2\, T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \{ H_I(t_1) H_I(t_2)\, \Theta(t_1-t_2)$$
$$+ H_I(t_2) H_I(t_1)\, \Theta(t_2-t_1) \}$$
$$= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2\, H_I(t_1) H_I(t_2)\, \Theta(t_1-t_2)$$
$$= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, H_I(t_1) H_I(t_2)$$)

$$\Rightarrow \boxed{U(t,t_0) = T\left\{ \exp\left(-i\int_{t_0}^{t} dt'\, H_I(t')\right)\right\}} \qquad (t \geq t_0)$$

Störungstheorie n-ter Ordnung:
Nimm nur Terme bis Ordnung $H_I^n \sim \lambda^n$ mit.

Verallgemeinerung auf beliebige Anfangszeiten:

$$U(t,t') = T\left\{ \exp\left(-i\int_{t'}^{t} dt''\, H_I(t'')\right)\right\} \qquad , \quad t \geq t'$$

$$2) \quad \boxed{U(t,t') = e^{iH_0(t-t_0)}\, e^{-iH(t-t')}\, e^{-iH_0(t'-t_0)}}$$

$$U(t_1,t_2)\,U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3) \qquad , \quad t_1 \geq t_2 \geq t_3$$

$$U(t_1,t_3)\,U^{+}(t_2,t_3) = U(t_1,t_2) \qquad , \quad \text{''}$$

(→ Übung)

ii) $|\Omega\rangle$

Annahme: WW kleine Störung ⇒ $\langle 0|\Omega\rangle \neq 0$

$$\Rightarrow e^{-iH\tau}|0\rangle = \sum_n e^{-iE_n\tau}|n\rangle\langle n|0\rangle$$

$$= e^{-iE_0\tau}|\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n\neq 0} e^{-iE_n\tau}|n\rangle\langle n|0\rangle$$

$$\Rightarrow \left(e^{-iE_0\tau}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1} e^{-iH\tau}|0\rangle$$

$$= |\Omega\rangle + \sum_{n\neq 0} e^{-i(E_n-E_0)\tau}\frac{\langle n|0\rangle}{\langle\Omega|0\rangle}|n\rangle$$

Energie-Eigenwerte:
$H|n\rangle = E_n|n\rangle$
$H|\Omega\rangle = E_0|\Omega\rangle$

$H_0|0\rangle = 0$

$|\Omega\rangle$ Grundzustand $\Rightarrow$ $E_n > E_0 \quad \forall n \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} e^{-i(E_n - E_0)\tau} = 0 \qquad \left(\lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} f(\tau) := \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{T \to \infty} f((1-i\varepsilon)T) \right)$$

$$\Rightarrow |\Omega\rangle = \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \left(e^{-iE_0\tau} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} e^{-iH\tau} |0\rangle$$

Verschiebung von τ um eine Konstante t_0:

$$|\Omega\rangle = \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \left(e^{-iE_0(\tau + t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} e^{-iH(\tau + t_0)} |0\rangle$$

Definiere Energie des ungestörten Grundzustands $H_0 |0\rangle = 0$

$$\Rightarrow e^{-iH_0 t} |0\rangle = |0\rangle \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow |\Omega\rangle = \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} (\dots)^{-1} \underbrace{e^{-iH(t_0 + \tau)} e^{-iH_0(-\tau - t_0)}}_{U(t_0, -\tau)} |0\rangle$$

analog

$$\langle \Omega | = \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \langle 0 | U(\tau, t_0) \left(e^{-iE_0(\tau - t_0)} \langle 0 | \Omega \rangle \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow 1 = \langle \Omega | \Omega \rangle$$

$$= \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \left(e^{-2iE_0\tau} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2 \right)^{-1} \langle 0 | \underbrace{U(\tau, t_0) U(t_0, -\tau)}_{U(\tau, -\tau)} | 0 \rangle$$

- Sei nun $x^0 > y^0 > t_0$

$\Rightarrow \langle\Omega|\phi(x)\,\phi(y)|\Omega\rangle$

$$= \lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty} \left(e^{-2iE_0\tau}\,|\langle\Omega|0\rangle|^2\right)^{-1}$$

$$* \langle 0|U(\tau,t_0)\,U^\dagger(x^0,t_0)\,\phi_I(x)\,U(x^0,t_0)$$

$$* \quad U^\dagger(y^0,t_0)\,\phi_I(y)\,U(y^0,t_0)\,U(t_0,-\tau)\,|0\rangle$$

$$= \lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty} \frac{\langle 0|U(\tau,x^0)\,\phi_I(x)\,U(x^0,y^0)\,\phi_I(y)\,U(y^0,-\tau)|0\rangle}{\langle 0|U(\tau,-\tau)|0\rangle}$$

- t_0 tritt nicht mehr auf
- alle Größen zeitgeordnet

- $y^0 > x^0 \Rightarrow \langle\Omega|T\{\phi(x)\,\phi(y)\}|\Omega\rangle = \langle\Omega|\phi(y)\,\phi(x)|\Omega\rangle$
$= \ldots$ (analog)

2) Gesamtergebnis:

$$\boxed{\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty} \frac{\langle 0|T\{\phi_I(x)\,\phi_I(y)\,\exp(-i\int_{-\tau}^{\tau}dt\,H_I(t))\}|0\rangle}{\langle 0|T\{\exp(-i\int_{-\tau}^{\tau}dt\,H_I(t))\}|0\rangle}}$$

- gilt analog für höhere Korrelationfunktionen mit beliebig vielen Feldern

- exakte Formel, Ausgangspunkt für Störungsrechnung