$\Rightarrow \mathcal{L}_{WW} = -e\, j^{\mu}_{\text{Teilchen}} A_{\mu} \equiv -j^{\mu}_{\text{Ladung}} A_{\mu}$ (vgl. Maxwell-Theorie s. IV.2)

$\Rightarrow$ „Kopplungskonstante" $e = -|e| =$ Elektron-Ladung
(dimensionslos)

- $\mathcal{L}_{QED}$ ist invariant unter einer <u>lokalen</u> (= x-abhängigen) Phasentransformation, wenn man gleichzeitig eine Eichtransformation des Photonfeldes durchführt:

$$\boxed{\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x), \qquad A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha(x)}$$

(→ Übung)

→ Die QED ist eine <u>Eichtheorie</u>, die man dadurch motivieren kann, dass man eine globale Symmetrie der freien Dirac-Theorie durch Hinzufügen eines „Eichfeldes" A_{μ} zu einer lokalen Symmetrie macht („eicht").

$\hookrightarrow$ „kovariante Ableitung" $\quad D_{\mu} := \partial_{\mu} + ieA_{\mu}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

- Bewegungsgleichungen:

$$(i\not{D} - m)\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (i\not{\partial} - m)\psi = e\not{A}\psi$$

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi$$

Allgemein sind zunächst unendlich viele WW-Terme vorstellbar.

Einschränkung im Standard-Modell:

fundamentale Theorien sollten renormierbar sein.

stark vereinfachte Idee:

- störungstheoret. Entwicklung einer Amplitude M in der Kopplungskonstanten λ:

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} M^{(n)} \lambda^n \equiv M^{(0)} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{M}^{(n)} \lambda^n}_{\text{dimensionslos}} , \quad \tilde{M}^{(n)} = \frac{M^{(n)}}{M^{(0)}}$$

- Die höheren Ordnungen ($n \geq 2$) enthalten häufig divergente Impulsintegrale

  $\Rightarrow$ • Regularisierung durch „Cutoff" Λ: $\int_0^\infty dp \to \int_0^\Lambda dp$

  • Berechnung von Observablen $O(\Lambda)$

  • am Ende $\lim_{\Lambda\to\infty} O(\Lambda)$

  Das sollte besser endlich bleiben!

- Annahme: $[\lambda] = (\mathrm{MeV})^m$, $m = -|m| < 0$

$$\Rightarrow [\tilde{M}^{(n)}] = \mathrm{MeV}^{-nm} \rightsquigarrow \tilde{M}^{(n)} \sim \Lambda^{-nm} = \Lambda^{n|m|}$$

$\Rightarrow$ immer schlimmere Divergenzen mit wachsender Ordnung

$$\Rightarrow [\lambda] = (\mathrm{MeV})^m , \quad m \overset{!}{\geq} 0$$

d.h. die Kopplung darf keine negative Energie-Dimension haben.

- Klein-Gordon-Feld : $[\phi] = \text{MeV}$
- Dirac-Feld : $[\psi] = \text{MeV}^{3/2}$ $\quad \Big(\underset{\frac{3}{2}}{\bar\psi} \underset{+\ 1\ +}{(i\partial\!\!\!/ - m)} \underset{\frac{3}{2}}{\psi} = 4 \checkmark \Big)$
- Elm. Feld : $[A^\mu] = \text{MeV}$

$\mathcal{L}_{WW}$	$[\lambda]$	renormierbar?	
$\lambda\phi^3$	MeV	ja	
$\lambda\phi^4$	1	ja	
$\lambda\phi^5$	MeV^{-1}	nein	
$\lambda\bar\psi\psi$	MeV	ja	($\hat{=}$ Massenterm, keine WW)
$\lambda\psi^3$	$\text{MeV}^{-1/2}$	nein	(und nicht Lorentz-invar.)
$\lambda(\bar\psi\psi)^2$	MeV^{-2}	nein	
$\lambda\bar\psi A\!\!\!/\psi$	1	ja	($\to$ QED)
$\lambda A^2\partial_\mu A^\mu$	1	ja	($\to$ QCD)
λA^4	1	ja	($\to$ QCD)
$\lambda\bar\psi\psi\phi$	1	ja	($\to$ Yukawa-Theorie)
$A^\mu\phi\partial_\mu\phi$	1	ja	($\to$ skalare Elektrodynamik)
ϕ^2A^2	1	ja	(" ")

Dies sind alle Möglichkeiten!

$\to$ Die Forderung nach Renormierbarkeit schränkt die Zahl der möglichen Wechselwirkungsterme stark ein.

V.2 Störungstheoretische Entwicklung von Korrelationsfunktionen

Wechselwirkende QFT nicht mehr exakt lösbar.
→ einfachste Methode: Störungstheorie bei kleinen Kopplungen

Ziel: Berechnung von Wirkungsquerschnitten und Zerfallsraten.

erster Schritt:
Korrelationsfunktion: $\langle \Omega | T\, \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$
in ϕ^4-Theorie

$|\Omega\rangle$ = Grundzustand der wechselwirkenden Theorie
$\neq$ $|0\rangle$ = " " freien "

freie Theorie:
$$\langle 0 | T\, \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip\cdot(x-y)}$$

ϕ^4-Theorie:
$$H = H_0 + H_{ww} = H_{KG} + \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

Auswirkungen von H_{ww}:

i) andere Zeitentwicklung $\phi(x) = e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt}$

ii) $|\Omega\rangle \neq |0\rangle$

Ziel: störungstheoret. Entwicklung beider Effekte