2) Bewegungsgleichung: $\Box A^\mu(x) = j^\mu(x)$

(korrekt für $\partial_\mu A^\mu = 0$)

kanon. konj. Impuls: $\pi^\mu(x) = -\dot{A}^\mu(x)$ ✓

IV. 2 Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

freies elektromagnet. Feld ($j^\mu(x) = 0$) in Lorenz-Eichung

$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$

$\Rightarrow \quad \Box A^\mu(x) = 0$ $\hat{=}$ Klein-Gordon-Gl. für $m=0$ (für jede Komponente)

2) Fourierentwicklung: ($m = 0 \Rightarrow E_p = |\vec{p}|$)

$$\boxed{\begin{aligned} A^\mu(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left(a_{\vec{p}}^\lambda \, \varepsilon_\lambda^\mu(\vec{p}) \, e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^{\lambda\,\dagger} \, \varepsilon_\lambda^{\mu\,*}(\vec{p}) \, e^{ip\cdot x} \right) \\ &\equiv A^{\mu\,(+)}(x) + A^{\mu\,(-)}(x) \end{aligned}}$$

$\varepsilon_\lambda^\mu(\vec{p})$ = Polarisationsvektoren (→ E-Dynamik)

speziell Wahl:

$\varepsilon_0(\vec{p}) \equiv (n^\mu) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ „skalare Polarisation"

$\varepsilon_i(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\varepsilon}_i(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}_i^{\,*} \cdot \vec{\varepsilon}_j = \delta_{ij}$

mit

$\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_1(\vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_2(\vec{p}) = 0$ „transversale Polarisation"

$\vec{\varepsilon}_3(\vec{p}) = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ „longitudinale "

Daraus ergibt sich:

$$\boxed{\begin{aligned} &\varepsilon^*_{\varrho\mu}(\vec p)\,\varepsilon_\sigma{}^\mu(\vec p) = g_{\varrho\sigma} \equiv -\zeta_\varrho\,\delta_{\varrho\sigma}\,, \quad \zeta_\varrho = \begin{cases} -1\,, & \varrho = 0 \\ +1\,, & \varrho = 1,2,3 \end{cases} \\ &\sum_\varrho \zeta_\varrho\,\varepsilon_\varrho{}^{\mu *}(\vec p)\,\varepsilon_\varrho{}^\nu(\vec p) = -g^{\mu\nu} \end{aligned}}$$

(gilt allgemein)

<u>allgemeinere Wahl:</u>

$\varepsilon_0 = (n^\mu)\,, \qquad n_\mu n^\mu = 1$

$$\varepsilon_3^\mu(\vec p) = \frac{p^\mu - (p\cdot n)\,n^\mu}{[(p\cdot n)^2 - p^2]^{1/2}}$$

<u>Quantisierungsvorschrift:</u>

- Photonen: Spin 1 $\Rightarrow$ Bosonen $\rightsquigarrow$ erwarten Kommutator
- $\pi^\mu(x) = -\dot A^\mu(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} &[A^\mu(\vec x), \dot A^\nu(\vec y)] = -i\,\delta^3(\vec x-\vec y)\,g^{\mu\nu} \\ &[A^\mu(\vec x), A^\nu(\vec y)] = [\dot A^\mu(\vec x), \dot A^\nu(\vec y)] = 0 \end{aligned}}$$

- Faktor $g^{\mu\nu}$ wegen Kovarianz
- Vergleich mit Klein-Gordon:

$$[\phi(\vec x), \pi(\vec y)] = [\phi(\vec x), \dot\phi(\vec y)] = i\,\delta^3(\vec x-\vec y)$$

$\left.\begin{array}{l} \text{- umgekehrtes Vorzeichen für } [A^0, \dot A^0] \\ \text{- gleiches \quad " \quad " \quad } [A^i, \dot A^i] \end{array}\right\}$ vgl. $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu$

2.)
$$\boxed{\begin{aligned} &[a^\varrho_{\vec p}, a^{\sigma +}_{\vec q}] = -g_{\varrho\sigma}(2\pi)^3\delta^3(\vec p-\vec q) = \zeta_\varrho\,\delta_{\varrho\sigma}(2\pi)^3\delta^3(\vec p-\vec q) \\ &[a^\varrho_{\vec p}, a^\sigma_{\vec q}] = [a^{\varrho +}_{\vec p}, a^{\sigma +}_{\vec q}] = 0 \end{aligned}}$$

- Interpretation (wie üblich):

  $a_{\vec p}^{\lambda}$ = Vernichtungsoperator

  $a_{\vec p}^{\lambda\,\dagger}$ = Erzeugungsoperator

  Vakuum $|0\rangle$: $\quad a_{\vec p}^{\lambda}\,|0\rangle = 0 \quad \forall\ \vec p, \lambda$

  $\Rightarrow\ A^{\mu\,(+)}(x)\,|0\rangle = 0$

- Hamilton-Operator:

  $$H = \int d^3x\,\left(\pi^{\mu}(x)\,\dot A_{\mu}(x) - \mathcal{L}(x)\right)$$

  $$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,E_p \sum_{\lambda} \zeta_\lambda\, a_{\vec p}^{\lambda\,\dagger}\, a_{\vec p}^{\lambda} \qquad \text{(+ unendl. Vakuumbeitr.)}$$

  negative Beiträge von $\lambda = 0$? Nein!

  z.B. $|\vec p, \lambda\rangle = \mathcal{N}\, a_{\vec p}^{\lambda\,\dagger}\,|0\rangle$

  $\Rightarrow\ H\,|\vec p, \lambda\rangle = \zeta_\lambda^2\, E_p\,|\vec p, \lambda\rangle = +\,E_p\,|\vec p, \lambda\rangle$ ✓

- Norm der Ein-Teilchen-Zustände:

  $$\langle \vec p, \lambda\,|\,\vec p, \lambda\rangle = |\mathcal{N}|^2 \langle 0|\, a_{\vec p}^{\lambda}\, a_{\vec p}^{\lambda\,\dagger}|0\rangle = \zeta_\lambda\,(2\pi)^3\delta^3(\vec 0)\,|\mathcal{N}|^2\langle 0|0\rangle$$

  negativ für $\lambda = 0$!

Ursache des Problems:

- klass. E-Dynamik, Beobachtung:
  nur transversale Polarisationen
  $\Rightarrow\ \lambda = 0$ und $\lambda = 3$ sind unphysikalisch!
- Grund: $\partial_\mu A^\mu = 0$ wurde noch nicht implementiert.

<u>Problem:</u> $\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0 + \partial_k A^k = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{A}^0 = -\partial_k A^k$

$$\Rightarrow \; -i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = [A^0(\vec{x}), \dot{A}^0(\vec{y})] = -\frac{\partial}{\partial y^k}[A^0(\vec{x}), A^k(\vec{y})] = 0 \quad \lightning$$

$\rightarrow$ $\partial_\mu A^\mu = 0$ kann keine Operator-Identität sein.

2) $\boxed{\text{Gupta \& Bleuler: } \quad \partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\Psi\rangle \overset{!}{=} 0 \quad \text{für alle physikal. Zustände } |\Psi\rangle}$

d.h. Einschränkung des erlaubten Zustandsraums,
nicht der Operatoren.

$$\Rightarrow \langle\Psi|\partial_\mu A^\mu|\Psi\rangle = \langle\underbrace{\Psi|\partial_\mu A^{\mu(-)}}_{=0} + \underbrace{\partial_\mu A^{\mu(+)}|\Psi}_{=0}\rangle = 0$$

d.h. die Eichbedingung gilt für die Erwartungswerte
der physikal. Zustände.

$\Rightarrow$ Maxwell-Gln. gelten im klassischen Limes.

- Gupta-Bleuler-Bedingung im Impulsraum:

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)|\Psi\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(a^3_{\vec p} - a^0_{\vec p})|\Psi\rangle = 0} \quad (\rightarrow \text{Übung})$$

$$\Rightarrow \langle\Psi|a^{3\dagger}_{\vec p} a^3_{\vec p} - a^{0\dagger}_{\vec p} a^0_{\vec p}|\Psi\rangle = \langle\Psi|a^{3\dagger}_{\vec p}(a^3_{\vec p} - a^0_{\vec p}) + (a^{3\dagger}_{p} - a^{0\dagger}_{\vec p})a^0_{\vec p}|\Psi\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\Psi|H|\Psi\rangle = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_{\lambda=1,2}\langle\Psi|a^{\lambda\dagger}_{\vec p} a^\lambda_{\vec p}|\Psi\rangle}$$

d.h. nur transversale Photonen tragen zum Energie-Erwartungswert bei!
(gilt auch für alle anderen Observablen
$\Rightarrow$ Nur transversale Photonen sind beobachtbar.)

IV. 3 Der Photon - Propagator

Analog zum Klein-Gordon-Fall findet man unter Verwendung von $\sum_\lambda \zeta_\lambda \varepsilon_\lambda^{\mu *}(\vec{p})\, \varepsilon_\lambda^{\nu}(\vec{p}) = -g^{\mu\nu}$

$$\langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = -g^{\mu\nu} D(x-y) \qquad (\text{für } m \to 0)$$

↳ Feynman-Propagator:

$$\boxed{\begin{aligned} D_F^{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0 | T\, A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle \\ &= -g^{\mu\nu} D_F(x-y)\Big|_{m=0} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon}\, e^{-ip\cdot(x-y)} \end{aligned}}$$

(mit bosonischem Zeitordnungsoperator)

V. Wechselwirkende Felder und Feynman-Diagramme

V.1 Wechselwirkungen

freie Felder: Fourier-Moden entkoppeln
$\leftrightarrow$ unabh. „harmonische Oszillatoren" für jeden Impuls
$\leftrightarrow$ lineare Bewegungsgleichungen

Wechselwirkungen: koppeln verschiedene Moden (und die zugehörigen Teilchen)
$\Leftrightarrow$ Streuprozesse, Teilchenerzeugung und -vernichtung
$\leftrightarrow$ nichtlineare Bewegungsgleichungen
$\leftrightarrow$ Zusatzterme $\mathcal{L}_{WW}$ ($\leftrightarrow \mathcal{H}_{WW}$)

Kausalität: nur „lokale" WW-Terme

- $[\phi(x)]^n$ erlaubt
- $\phi(x)\,\phi(y)$ nicht erlaubt
- 1. Ableitungsterme, z.B. $A^\mu \phi \partial_\mu \phi$ erlaubt, werden aber in dieser Vorlesung nicht betrachtet

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}_{WW} = -\mathcal{L}_{WW}$$

1. Beispiel: ϕ^4-Theorie

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2}_{\text{freie KG-Lagrange-D.}} \; \underbrace{- \frac{\lambda}{4!}\phi^4}_{\mathcal{L}_{WW}}$$

- λ = „Kopplungskonstante"

  Dimension?

$$[\mathcal{L}] = \left[\frac{E}{V}\right] = [E^4] = \text{MeV}^4 = [m^2\phi^2] = [\lambda\phi^4]$$

$\Rightarrow [\phi] = \text{MeV}$

$\Rightarrow [\lambda] = 1$ dimensionslos

- Bewegungsgleichung: $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = \underbrace{-\frac{\lambda}{3!}\phi^3}_{\frac{\partial \mathcal{L}_{WW}}{\partial\phi}}$

- keine zusätzlichen Ableitungen $\Rightarrow \pi(x) = \dot{\phi}(x)$ (wie zuvor)

- Quantisierung unverändert: $[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$ etc.
(gilt auch bei Ableitungskopplungen, dann jedoch mit dem entsprechend veränderten $\pi(\vec{y})$).

- einfachstes Beispiel einer wechselwirkenden QFT, Anwendung: Higgs-Selbst-WW

2. Beispiel: Quanten-Elektrodynamik

$$\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi}_{\text{freies Elektron}} \underbrace{- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{freies Photon}} \underbrace{- e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\text{Elektron-Photon-WW}}$$

- $\mathcal{L}_{QED}$ ist (wie $\mathcal{L}_{Dirac}$) invariant unter der globalen (= x-unabhängigen) Phasentransformation $\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x)$

$\Rightarrow$ erhaltener Noether-Strom: $j^\mu_{\text{Teilchen}} = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

($\Leftrightarrow$ erhaltene Zahl Elektronen minus Positronen, vgl. S. III. 30)