Verhalten von Dirac-Feldern (= Operatoren!) unter Lorentz-Transformationen (→ Abschnitt III.2.4):

$$U^+(\Lambda)\,\psi(x)\,U(\Lambda) = \Lambda_{1/2}\,\psi(\Lambda^{-1}x)$$

mit $\Lambda_{1/2}^{-1}\,\gamma^\mu\,\Lambda_{1/2} = \Lambda^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu$.

Für kontinuierlichen Lorentz-Transformationen (Boosts und Drehungen) haben wir $\Lambda_{1/2}$ schon konstruiert. Wir wollen uns jetzt mit diskreten Symmetrien beschäftigen:

i) <u>Parität:</u> $x = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \longrightarrow x' = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$ (→ Abschn. III.2.3)

$$\Rightarrow (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} . \qquad U(\Lambda) =: P$$

Wie sieht das zugehörige $\Lambda_{1/2}$ aus?

Bei der Konstruktion der Dirac-Gleichung in Abschnitt III.2.3 haben wir gefunden

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = \gamma^0\,\psi ,$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass wir dort in Weyl-Darstellung gearbeitet haben. Das legt nahe, dass $\Lambda_{1/2} = \gamma^0$ auch in anderen Darstellungen die Spinortransformation unter Paritätstransformationen beschreibt. In der Tat gilt:

$$\gamma^{0\,-1}\,\gamma^\mu\,\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \begin{Bmatrix} \gamma^\mu , & \mu = 0 \\ -\gamma^\mu , & \mu = 1,2,3 \end{Bmatrix} = \Lambda^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu$$

allgemeinerer Ansatz:

Unter Paritätstransformationen gilt $\vec{p} \to -\vec{p}$, $s \to s$

$\hookrightarrow$ $P^\dagger a^s_{\vec{p}} P = \eta_a a^s_{-\vec{p}}$, $P^\dagger b^s_{\vec{p}} P = \eta_b b^s_{-\vec{p}}$

η_a, η_b zunächst beliebige Phasenfaktoren

$$\Rightarrow P^\dagger \psi(x) P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(\eta_a a^s_{-\vec{p}} u^s(\vec{p}) e^{-ip\cdot x} + \eta_b^* b^{s\dagger}_{-\vec{p}} v^s(\vec{p}) e^{ip\cdot x} \right)$$

Def.: $\tilde{p} := \begin{pmatrix} p^0 \\ -\vec{p} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $p\cdot x = \tilde{p} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} = \tilde{p} \cdot \Lambda^{-1} x$

In Weyl-Darstellung gilt außerdem: $u(\tilde{p}) = \gamma^0 u(-\vec{p})$

$v(\tilde{p}) = -\gamma^0 v(-\vec{p})$

$$\Rightarrow P^\dagger \psi(x) P = \int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}} \sum_s \left(\eta_a a^s_{\tilde{p}} \gamma^0 u^s(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p}\cdot \Lambda^{-1}x} - \eta_b^* b^{s\dagger}_{\tilde{p}} \gamma^0 v^s(\tilde{p}) e^{i\tilde{p}\cdot\Lambda^{-1}x} \right)$$

$$\stackrel{!}{=} \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x)$$

$$\Rightarrow \quad \eta_a = -\eta_b^* \equiv e^{i\alpha} \quad , \quad \Lambda_{\frac{1}{2}} = e^{i\alpha}\gamma^0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} P^\dagger \psi(t,\vec{x}) P = e^{i\alpha}\gamma^0 \psi(t,-\vec{x}) \\ P^\dagger a^s_{\vec{p}} P = e^{i\alpha} a^s_{-\vec{p}} \, , \quad P^\dagger b^s_{\vec{p}} P = - e^{-i\alpha} b^s_{-\vec{p}} \end{array}}$$

$$\Rightarrow P^\dagger a^{r\dagger}_{\vec{p}} b^{s\dagger}_{\vec{q}} P = P^\dagger a^{r\dagger}_{\vec{p}} P P^\dagger b^{s\dagger}_{\vec{q}} P = - a^{r\dagger}_{-\vec{p}} b^{s\dagger}_{-\vec{q}}$$

$\rightsquigarrow$ negative „innere Parität" von Fermion-Antifermion-Paaren

übliche Konvention: $e^{i\alpha} = 1$

ii) <u>Zeitumkehr:</u> $(t, \vec{x}) \to (-t, \vec{x})$

kompliziert: Zeitumkehroperator T <u>antiunitär</u>:

$T^\dagger T = \mathbb{1}$, $T\,(\text{c-Zahl}) = (\text{c-Zahl})^*\,T$

$$\boxed{\begin{aligned} T^\dagger \psi(t,\vec{x})\, T &= -\gamma^1\gamma^3\, \psi(-t,\vec{x}) \\ T^\dagger a^s_{\vec{p}}\, T = a^{-s}_{-\vec{p}}\,, &\quad T^\dagger b^s_{\vec{p}}\, T = -\,b^{-s}_{-\vec{p}} \end{aligned}}$$

(mit Phasenkonvention $\eta_T = 1$)

iii) <u>Ladungskonjugation:</u>
wandelt Teilchen in Antiteilchen um (→ keine Lorentz-Tr.)

$$\boxed{\begin{aligned} C^\dagger \psi(x)\, C &= -i\gamma^2 (\psi^\dagger(x))^T = -i\gamma^2\gamma^0\,\bar{\psi}^T(x) \\ C^\dagger a^s_{\vec{p}}\, C = b^s_{\vec{p}}\,, &\quad C^\dagger b^s_{\vec{p}}\, C = a^s_{\vec{p}} \end{aligned}}$$

<u>Bilineare:</u>

- $\gamma_5 \equiv \gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

  $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$, $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$, $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$

- Die Matrizen $\mathbb{1}$, γ_5, $\{\gamma^\mu\}$, $\{\gamma^\mu\gamma_5\}$, $\{\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\}$

  $$\begin{array}{cccccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (\text{Anzahl:} & 1 & + & 1 & + & 4 & + & 4 & + & 6 = 16) \end{array}$$

  bilden eine Basis der 4×4 - Matrizen

- $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\, i\gamma_5\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$, $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$
  sind hermitesche Bilineare

Verhalten unter C, P, T:

	$\bar\psi\psi$	$\bar\psi i\gamma_5\psi$	$\bar\psi\gamma^\mu\psi$	$\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi$	$\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$
P	+1 (Skalar)	−1 (Pseudoskalar)	$(-1)^\mu$ (Vektor)	$-(-1)^\mu$ (Axialvektor)	$(-1)^\mu(-1)^\nu$ (Tensor)
T	+1	−1	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$
C	+1	+1	−1	+1	−1
CPT	+1	+1	−1	−1	+1

mit $(-1)^\mu := \begin{cases} +1 & \text{für } \mu = 0 \\ -1 & \text{" } \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$

Insbesondere gilt:

$\mathcal{L} = \bar\psi\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi$ ist separat invariant unter P, T und C (→ Übung)

IV. Das elektromagnetische Feld

IV.1 Klassische kovariante Theorie des elektromagn. Feldes

(inhom.) Maxwell-Gleichungen: (vgl. Abschnitt I.4.1)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \qquad \left((j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \text{Vierer-}\underline{\text{Ladungsstrom}} = q \cdot \text{Teilchenstrom} \right)$$

mit

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \qquad (\text{Feldstärketensor})$$

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \qquad (\text{Viererpotential})$$

- Die homogenen Maxwell-Gln. $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$, gelten dann automatisch (vgl. $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$).

- Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0 \quad , \text{ da } F^{\mu\nu} \text{ antisymm.}$$

- Eichtransformation: $A^\mu(x) \to A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$

$$\Rightarrow F^{\mu\nu} \to \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu f) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu f) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

invariant!

Insbesondere sind damit auch die Bewegungsgleichungen invariant unter Eichtransformationen.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \Box A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu)$$

$$\Rightarrow \quad \Box A^\mu(x) - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu(x)) = j^\mu(x)$$

...

- <u>Lagrange-Dichte:</u>

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu}$$

$$\left(\Rightarrow \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha A_\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = \ldots = -\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + j^\beta = 0 \Rightarrow \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = j^\beta \checkmark \right)$$

- <u>kanon. konj. Impulse:</u>

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu(x)} = -F^{0\mu}(x)$$

<u>Problem:</u> $\pi^0(x) = -F^{00}(x) = 0$

$\Rightarrow$ nicht ohne weiteres quantisierbar, da $[A^0(\vec{x}), \pi^0(\vec{y})] \overset{!}{=} i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$ ↯

tieferer Grund: Die vier Komponenten von A^μ enthalten zu viele Freiheitsgrade
(Spin 1 $\Rightarrow$ nur drei Spinzustände,
Photonen sogar nur zwei)

2) <u>Ausweg</u> (Fermi):
Implementiere von vorn herein eine Eichbedingung, die die Zahl der Freiheitsgrade einschränkt:

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0} \quad \text{(Lorenz-Eichung)}$$

und verwende die Lagrangedichte

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - j^\mu A_\mu}$$