$\rightarrow$ Hamilton - Operator:

$$H = \int d^3x \; \psi^\dagger(\vec{x}) \; \hat{H}_D \; \psi(\vec{x})$$

$$= \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_q}} \sum_{rs} \left(a_{\vec{q}}^{r\,\dagger} u^{r\,\dagger}(\vec{q}) + b_{-\vec{q}}^{r} v^{r\,\dagger}(-\vec{q}) \right) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}$$

$$\hat{H}_D \left(a_{\vec{p}}^s \underbrace{u^s(\vec{p})}_{\downarrow\, E_p} + b_{-\vec{p}}^{s\,\dagger} \underbrace{v^s(-\vec{p})}_{\downarrow\, -E_p} \right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sum_{rs} \Big\{ a_{\vec{p}}^{r\,\dagger} a_{\vec{p}}^s \underbrace{u^{r\,\dagger}(\vec{p}) u^s(\vec{p})}_{2E_p \delta_{rs}} - a_{\vec{p}}^{r\,\dagger} b_{-\vec{p}}^{s\,\dagger} \underbrace{u^{r\,\dagger}(\vec{p}) v^s(-\vec{p})}_{=0}$$

$$+ b_{-\vec{p}}^{r} a_{\vec{p}}^s \underbrace{v^{r\,\dagger}(-\vec{p}) u^s(\vec{p})}_{=0} - b_{-\vec{p}}^{r} b_{-\vec{p}}^{s\,\dagger} \underbrace{v^{r\,\dagger}(-\vec{p}) v^s(-\vec{p})}_{2E_p \delta_{rs}} \Big\}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a_{\vec{p}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^s b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} \right)$$

<u>Fall 1:</u> Kommutator

$$\curvearrowright \; b_{\vec{p}}^s b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} = b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} b_{\vec{p}}^s + \underbrace{[b_{\vec{p}}^s, b_{\vec{p}}^{s\,\dagger}]}_{-(2\pi)^3 \delta^3(\vec{0})}$$

$$\Rightarrow \; H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a_{\vec{p}}^{s\,\dagger} a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^{s\,\dagger} b_{\vec{p}}^s + (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0}) \right)$$

↑ nicht messbare Vakuumenergie ✓

je mehr „b-Teilchen", desto niedriger die Energie

$\Rightarrow$ Spektrum nicht nach unten beschränkt

↯

Fall 2: Antikommutator

$$\rightarrow \quad b_{\vec p}^s b_{\vec p}^{s\dagger} = - b_{\vec p}^{s\dagger} b_{\vec p}^s + \underbrace{\{ b_{\vec p}^s , b_{\vec p}^{s\dagger} \}}_{(2\pi)^3 \delta^3(\vec 0)}$$

$$\Rightarrow \quad H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a_{\vec p}^{s\dagger} a_{\vec p}^s + b_{\vec p}^{s\dagger} b_{\vec p}^s - (2\pi)^3 \delta^3(\vec 0) \right)$$

funktioniert!

$\rightarrow$ Quantisierungsvorschrift für Dirac-Felder:

$$\boxed{\begin{aligned} &\{ \psi_a(\vec x), \psi_b^\dagger(\vec y) \} = \delta^3(\vec x - \vec y)\, \delta_{ab} \\ &\{ \psi_a(\vec x), \psi_b(\vec y) \} = \{ \psi_a^\dagger(\vec x), \psi_b^\dagger(\vec y) \} = 0 \\ &\{ a_{\vec p}^r, a_{\vec q}^{s\dagger} \} = \{ b_{\vec p}^r, b_{\vec q}^{s\dagger} \} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec p - \vec q)\, \delta_{rs} \\ &\{ a_{\vec p}^r, a_{\vec q}^s \} = (\text{alle anderen}) = 0 \end{aligned}}$$

Heisenberg-Bild:

wie Klein-Gordon: $\quad e^{iHt} a_{\vec p}^s e^{-iHt} = a_{\vec p}^s e^{-iE_p t}$

$\quad e^{iHt} b_{\vec p}^s e^{-iHt} = b_{\vec p}^s e^{-iE_p t}$

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a_{\vec p}^s u^s(\vec p)\, e^{-ip\cdot x} + b_{\vec p}^{s\dagger} v^s(\vec p)\, e^{ip\cdot x} \right) \\ \bar\psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(b_{\vec p}^s \bar v^s(\vec p)\, e^{-ip\cdot x} + a_{\vec p}^{s\dagger} \bar u^s(\vec p)\, e^{ip\cdot x} \right) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} H &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a_{\vec p}^{s\dagger} a_{\vec p}^{s} + b_{\vec p}^{s\dagger} b_{\vec p}^{s} \right) \qquad \text{(ohne Vak.-Energie)} \\ \vec P &= \int d^3x \; \psi^\dagger (-i\vec\nabla) \psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \vec p \left(a_{\vec p}^{s\dagger} a_{\vec p}^{s} + b_{\vec p}^{s\dagger} b_{\vec p}^{s} \right) \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ $a_{\vec p}^{s\dagger}, b_{\vec p}^{s\dagger}$ erzeugen Teilchen mit Energie E_p und Impuls $\vec p$.

<u>Ein-Teilchen-Zustände:</u>

$$|\vec p, s\rangle \equiv |\vec p, s\rangle_a = \sqrt{2E_p}\; a_{\vec p}^{s\dagger} |0\rangle \quad , \quad |\vec p, s\rangle_b = \sqrt{2E_p}\; b_{\vec p}^{s\dagger} |0\rangle$$

$$\Rightarrow \quad {}_c\langle \vec p, r | \vec q, s\rangle_d = 2E_p \, (2\pi)^3 \, \delta^3(\vec p - \vec q)\, \delta_{rs}\, \delta_{cd}$$

<u>Mehr-Teilchen-Zustände:</u>

$$a_{\vec p}^{r\dagger} a_{\vec q}^{s\dagger} |0\rangle = - a_{\vec q}^{s\dagger} a_{\vec p}^{r\dagger} |0\rangle \qquad \text{etc.} \Rightarrow \text{antisymmetrisch}$$

$\Rightarrow$ Dirac-Teilchen gehorchen der Fermi-Dirac-Statistik!

insbesondere: $\quad a_{\vec p}^{s\dagger} a_{\vec p}^{s\dagger} |0\rangle = 0 \qquad$ (Pauli-Prinzip)

<u>Ladung:</u>

$$\mathcal{L} = \bar\psi (i\partial\!\!\!/ - m)\psi \qquad \text{invariant unter} \qquad \psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x)$$

$\Rightarrow$ erhaltener Strom: $\quad j^\mu(x) = \bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)$

$$\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\psi + \bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi = im\bar\psi\psi - im\bar\psi\psi = 0 \; \checkmark$$

$\Rightarrow$ erhaltene Ladung: $\quad Q = \int d^3x \, j^0 = \int d^3x \, \psi^\dagger\psi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(a_{\vec p}^{s\dagger} a_{\vec p}^{s} - b_{\vec p}^{s\dagger} b_{\vec p}^{s} \right) \qquad \text{(+ unendl. Vakuumbeitrag)}}$$

$\Rightarrow$ a^+ und b^+ erzeugen Teilchen mit entgegengesetzter Ladung: Teilchen und Antiteilchen!

Spin:

Lorentz-Transf. (insbesondere Drehungen):

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \Lambda_{1/2}\, \psi(\Lambda^{-1} x)$$

$$\Rightarrow \quad \delta\psi(x) = \psi'(x) - \psi(x) = \ldots$$

z.B. inf. Drehung um die z-Achse:

$$\Rightarrow \quad \delta\psi(x) = \theta\, \Delta\psi(x) = -\theta\,(\underbrace{x\partial_y - y\partial_x}_{\text{von } \Lambda^{-1}x} + \underbrace{\tfrac{i}{2}\Sigma^3}_{\text{von } \Lambda_{1/2}})\,\psi(x)$$

$$\text{mit} \quad \Sigma^3 = \sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ erhaltene „Ladungen":

$$\vec{J} = \int d^3x\, \psi^+ (\underbrace{\vec{x} \times (-i\vec{\nabla})}_{\text{Bahndrehimpuls}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\vec{\Sigma}}_{\text{Spin}})\,\psi$$

Man kann zeigen:

$$\boxed{\begin{aligned} J_z\, a_0^{s+}|0\rangle &= \begin{cases} +\tfrac{1}{2}\, a_0^{s+}|0\rangle & \text{für } \xi^s = \binom{1}{0} \\ -\tfrac{1}{2}\, a_0^{s+}|0\rangle & \text{''} \quad \xi^s = \binom{0}{1} \end{cases} \\ J_z\, b_0^{s+}|0\rangle &= \begin{cases} -\tfrac{1}{2}\, b_0^{s+}|0\rangle & \text{''} \quad \eta^s = \binom{1}{0} \\ +\tfrac{1}{2}\, b_0^{s+}|0\rangle & \text{''} \quad \eta^s = \binom{0}{1} \end{cases} \end{aligned}}$$

$\rightarrow$ Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen!

III. 6 Der Dirac - Propagator

Ausbreitungsamplituden:

$$\langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_s u_a^s(\vec{p}) \bar{u}_b^s(\vec{p})\, e^{-ip\cdot(x-y)}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\not{p} + m)_{ab}\, e^{-ip\cdot(x-y)}$$

$$= (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p}\, e^{-ip\cdot(x-y)}$$

$$= (i\not{\partial}_x + m)_{ab}\, D(x-y)$$

↑ Klein-Gordon-Amplitude

analog:

$$\langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle = -(i\not{\partial}_x + m)_{ab}\, D(y-x)$$

→ retardierter Propagator:

$$S_R^{ab}(x-y) := \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \{ \psi_a(x), \bar{\psi}_b(y) \} | 0 \rangle$$

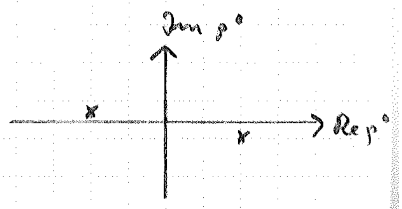
$$= (i\not{\partial}_x + m)_{ab}\, D_R(x-y)$$

Feynman - Propagator: (→ Übung)

$$S_F(x-y) = \langle 0 | T\, \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$$

$$:= \begin{cases} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle & \text{falls } x^0 > y^0 \\ -\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle & \text{"} \quad y^0 > x^0 \end{cases}$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\, e^{-ip\cdot(x-y)}$$



- Minuszeichen beim zeitgeordneten Produkt für Fermionen!

- $\langle 0 | \psi(x)\, \bar\psi(y) | 0 \rangle \leftrightarrow$ Propagation von Teilchen
  $\langle 0 | \bar\psi(y)\, \psi(x) | 0 \rangle \leftrightarrow$ " " Antiteilchen

- Def. avancierter Propagator S_A analog

- S_F, S_R und S_A sind Green'sche Funktionen zum Dirac-Operator, z.B.

  $$(i \not\partial_x - m)\, S_F(x-y) = i\,\delta^4(x-y)\, \mathbb{1}_{4\times4} \qquad (\to \text{Übung})$$

III.7 Diskrete Symmetrien

Symmetrietransformationen hängen allgemein mit unitären Transformationen von Zuständen zusammen:

$$|\phi\rangle \to |\phi'\rangle = U|\phi\rangle \quad , \qquad U^\dagger U = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \quad \langle\phi'|\phi'\rangle = \langle\phi|U^\dagger U|\phi\rangle = \langle\phi|\phi\rangle$$

$\rightsquigarrow$ Erwartungswerte von Operatoren:

$$\langle\phi|\hat A|\phi\rangle \to \langle\phi'|\hat A|\phi'\rangle = \langle\phi|U^\dagger A\, U|\phi\rangle \equiv \langle\phi|\hat A'|\phi\rangle$$

$\rightsquigarrow$ Alternativ kann man das Transformationsverhalten der Operatoren betrachten

$$A \to A' = U^\dagger A\, U$$