wobei man die Wurzel einer Matrix über die positiven Wurzeln ihrer Eigenwerte definiert.

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} U^+$$

$$\Rightarrow \sqrt{A} = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_N} \end{pmatrix} U^+ \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{A})^2 = A \quad \checkmark$$

(Beweis der Identität der beiden Ausdrücke:

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = \sqrt{\vec{p}^2}\;\vec{\sigma}\cdot\hat{p} = \sqrt{E^2-m^2}\;\vec{\sigma}\cdot\hat{p} = \sqrt{(E+m)(E-m)}\;\vec{\sigma}\cdot\hat{p}$$

$$\Rightarrow \; u(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} [\sqrt{E+m} - \sqrt{E-m}\;\vec{\sigma}\cdot\hat{p}]\,\xi \\ [\sqrt{E+m} + \sqrt{E-m}\;\vec{\sigma}\cdot\hat{p}]\,\xi \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{E+m} \mp \sqrt{E-m}\;\vec{\sigma}\cdot\hat{p}] \right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[E+m+E-m \mp 2\sqrt{E^2-m^2}\;\vec{\sigma}\cdot\hat{p}\right] = E \mp \vec{p}\cdot\vec{\sigma}$$

$$= \begin{cases} p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} \end{cases}$$

$\checkmark$)

<u>zur Normierung:</u>

- $\bar{\psi}\psi$ Lorentz-Skalar $\Rightarrow$ $\bar{u}u$ Lorentz-Skalar

$$\Rightarrow \bar{u}(\vec{p})u(\vec{p}) = \bar{u}(0)u(0) = m\,(\xi^+, \xi^+) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} = 2m$$

- $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ Lorentz-Vektor $\Rightarrow$ $\bar{u}\gamma^\mu u$ Lorentz-Vektor

$$\Rightarrow u^+(\vec{p})u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p})\gamma^0 u(\vec{p}) = \frac{E_p}{m}\,u^+(0)u(0) = 2E_p$$

Da ξ zwei Komponenten besitzt, können wir zwei orthogonale Spinoren ξ^1 und ξ^2 definieren mit $\xi^{r\dagger}\xi^s = \delta^{rs}$

(z.B. $\xi^1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\xi^2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$)

Entsprechend gibt es dann auch jeweils zwei orthogonale Lösungen $u^s(\vec p)$ mit

$$\bar u^r(\vec p)\, u^s(\vec p) = 2m\,\delta^{rs}$$

$$u^{r\dagger}(\vec p)\, u^s(\vec p) = 2E_p\,\delta^{rs}$$

ii) <u>Lösungen negativer Frequenz</u>

Analog findet man zunächst im Ruhesystem:

$$v(\vec 0) = N\begin{pmatrix}\eta\\-\eta\end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix},$$

d.h. in der Notation von S. III-12 finden wir $\phi_L(\vec 0) = -\phi_R(\vec 0)$, was der dortigen Annahme in einem Vorzeichen widerspricht, welches jedoch irrelevant ist: Hätten wir auf S. III-12 $\phi_L(\vec 0) = -\phi_R(\vec 0)$ angenommen, hätten wir die Dirac-Gleichung einer anderen Darstellung der γ-Matrizen gefunden, nämlich mit $\gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & -\mathbb{1}\\ -\mathbb{1} & 0\end{pmatrix}$ und $\gamma^i = \begin{pmatrix}0 & -\sigma^i\\ \sigma^i & 0\end{pmatrix}$. Dies hätte dann auf vertauschte Rollen von $u(\vec 0)$ und $v(\vec 0)$ geführt: $u(\vec 0) \sim \begin{pmatrix}\xi\\-\xi\end{pmatrix}$, $v(\vec 0) \sim \begin{pmatrix}\eta\\ \eta\end{pmatrix}$.

Wir bleiben jedoch bei der Weyl-Darstellung.
Boosten von $v(\vec{0})$ liefert dann

$$v(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [E+m-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\,\eta \\ -[E+m+\vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\,\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\;\eta \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\;\eta \end{pmatrix}$$

Insgesamt finden wir also vier unabhängige Lösungen mit Impuls $\vec{p}$:

$$u^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\;\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\;\xi^s \end{pmatrix}, \quad s=1,2, \qquad \xi^{r\dagger}\xi^s = \delta^{rs}$$

$$v^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\;\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\;\eta^s \end{pmatrix}, \quad '' , \qquad \eta^{r\dagger}\eta^s = \delta^{rs}$$

$$\bar{u}^r(\vec{p})\,u^s(\vec{p}) = 2m\,\delta^{rs}$$

$$\bar{v}^r(\vec{p})\,v^s(\vec{p}) = -2m\,\delta^{rs}$$

$$\bar{u}^{(r)}(\vec{p})\,v^s(\vec{p}) = \bar{v}^{(r)}(\vec{p})\,u^s(\vec{p}) = 0$$

$$u^{r\dagger}(\vec{p})\,u^s(\vec{p}) = v^{r\dagger}(\vec{p})\,v^s(\vec{p}) = 2E_p\,\delta^{rs}$$

$$u^{r\dagger}(\vec{p})\,v^s(-\vec{p}) = v^{r\dagger}(\vec{p})\,u^s(-\vec{p}) = 0$$

Für $m=0$ sollte man die Beziehungen für $u^\dagger u$ und $v^\dagger v$ zur Normierung verwenden.

Spin - Summen:

Seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$,

dann definieren wir im Folgenden die $N \times N$-Matrix $a b^\dagger$ über das äußere Produkt

$$(a b^\dagger)_{ij} \equiv a_i b_j^\dagger$$

Betrachte nun $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^{2} \xi^s \xi^{s\dagger} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1, 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

(gilt allgemein für eine orthonormale Basis $\{\xi^1, \xi^2\}$)

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^{2} u^s(\vec{p})\, \bar{u}^s(\vec{p}) = \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\ \xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\ \xi^s \end{pmatrix} \left(\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}, \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma})} & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & \sqrt{(p\cdot\bar{\sigma})(p\cdot\sigma)} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Übung}}{=} \begin{pmatrix} m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & m \end{pmatrix}$$

$$= \gamma^\mu p_\mu + m \mathbb{1}_4$$

analog für $\sum v^s \bar{v}^s$

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_s u^s(\vec{p})\, \bar{u}^s(\vec{p}) &= \not{p} + m \\ \sum_s v^s(\vec{p})\, \bar{v}^s(\vec{p}) &= \not{p} - m \end{aligned}}$$

III.4 Lagrange-Dichte und Hamilton-Dichte des Dirac-Feldes

Lagrange-Dichte:

$$\boxed{\mathcal{L} = \bar{\psi}\,(i\not{\partial} - m)\,\psi}$$

- Lorentz-Skalar (⇒ nicht $\psi^\dagger (i\not{\partial} - m)\psi$)
- komplexe Felder ⇒ $\psi, \bar{\psi}$ unabh. Freiheitsgrade

↳ Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_r} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{adjungierte Gleichung}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_r} - \partial_\mu \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}_r}}_{=0} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{Dirac-Gleichung}$$

kanon. konj. Impuls zu ψ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \bar{\psi}\, i\gamma^0 = i\psi^\dagger = \pi$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0 \quad \Rightarrow \text{kein kanon. konj. Impuls zu } \bar{\psi} \right)$$

2) Hamilton-Dichte:

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} - \mathcal{L} = i\psi^\dagger \partial_0 \psi - \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$$
$$= \bar{\psi}(-i\gamma^k \partial_k + m)\psi$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{H} = \bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m)\psi} = \psi^\dagger(-i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m\gamma^0)\psi$$
$$= \psi^\dagger \underbrace{(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)}_{} \psi$$
$$= \psi^\dagger \hat{H}_D \psi$$

$\hat{H}_D$ = Dirac-Hamilton-Op. d. relativist. QM

Eigenfunktionen und Eigenwerte von $\hat{H}_0$:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\, u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m)\, u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} = i\gamma^0\partial_0\, u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} = \gamma^0 E_p\, u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \quad (-i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m\gamma^0)\, u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} = E_p\, u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \hat{H}_0\, u^s(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} = E_p\, u^s(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} \\ \hat{H}_0\, v^s(\vec{p})\, e^{ip\cdot x} = -E_p\, v^s(\vec{p})\, e^{ip\cdot x} \end{array}}$$

analog

$s = 1, 2 \Rightarrow$ 4 Eigenfunktionen zu gegebenem Impuls $\vec{p}$

$\rightsquigarrow$ Basis für 4-komponentigen Spinor

III. 5 Quantisierung des Dirac-Feldes

Wir beginnen wieder im Schrödinger-Bild.

naheliegende Quantisierungsvorschrift (analog zu Klein-Gordon):

$$[\psi_a(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})] = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{ab} \qquad \left(\pi = i\psi^\dagger \Rightarrow [\psi_a, \pi_b] = i\delta^3(\ldots)\,\delta_{ab}\right)$$

sowie

$$[\psi_a(\vec{x}), \psi_b(\vec{y})] = [\psi_a^\dagger(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})] = 0$$

Es wird sich jedoch herausstellen, dass wir damit auf Widersprüche stoßen und wir statt dessen die analogen <u>Anti</u>kommutatorrelationen fordern müssen:

$$\{\psi_a(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{ab}\,, \qquad \{\psi_a(\vec{x}), \psi_b(\vec{y})\} = \{\psi_a^\dagger(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})\} = 0$$

Um beide Fälle gemeinsam abzuhandeln, definieren wir

$$[A,B]_\pm = AB \pm BA \,, \quad \text{d.h.} \quad [A,B]_+ = \{A,B\}$$
$$[A,B]_- = [A,B]$$

Entwicklung von ψ nach Basisfunktionen

$$\psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a^s_{\vec{p}}\, u^s(\vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^{s\dagger}_{\vec{p}}\, v^s(\vec{p})\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \sum_s \left(a^s_{\vec{p}}\, u^s(\vec{p}) + b^{s\dagger}_{-\vec{p}}\, v^s(-\vec{p}) \right)$$

Dann sind die (Anti-) Kommutatorrelationen erfüllt, falls

$$[a^r_{\vec{p}}, a^{s\dagger}_{\vec{q}}]_\pm = \pm [b^r_{\vec{p}}, b^{s\dagger}_{\vec{q}}]_\pm = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{q})\, \delta_{rs}$$

und $[a^r_{\vec{p}}, a^s_{\vec{q}}]_\pm = (\text{alle anderen}) = 0$

Beweis (für $[\psi, \psi^\dagger]_\pm$):

$$[\psi_a(\vec{x}), \psi^\dagger_b(\vec{y})]_\pm$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_q}}\, e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{q}\cdot\vec{y})}$$
$$\cdot \sum_{r,s} \Big\{ [a^s_{\vec{p}}, a^{r\dagger}_{\vec{q}}]_\pm\, u^s_a(\vec{p})\, u^{r\dagger}_b(\vec{q})$$
$$+ [a^s_{\vec{p}}, b^{r}_{-\vec{q}}]_\pm\, u^s_a(\vec{p})\, v^{r\dagger}_b(-\vec{q})$$
$$+ [b^{s\dagger}_{-\vec{p}}, a^{r\dagger}_{\vec{q}}]_\pm\, v^s_a(-\vec{p})\, u^{r\dagger}_b(\vec{q})$$
$$+ [b^{s\dagger}_{-\vec{p}}, b^r_{-\vec{q}}]_\pm\, v^s_a(-\vec{p})\, v^{r\dagger}_b(-\vec{q}) \Big\}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \underbrace{\sum_s \left(u^s_a(\vec{p})\, \bar{u}^s_c(\vec{p}) + v^s_a(-\vec{p})\, \bar{v}^s_c(-\vec{p}) \right) \gamma^0_{cb}}_{\left((\gamma^0 E_p - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m + \gamma^0 E_p + \vec{\gamma}\cdot\vec{p} - m)\gamma^0\right)_{ab}}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\, \mathbb{1}_{ab} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\, \delta_{ab} \quad \checkmark$$