III. 2. 4 Spinor - Transformationen und Forminvarianz der Dirac - Gleichung

Die Generatoren K^k und J^k für Boosts und Drehungen lassen sich - ähnlich wie die elektrischen und magnetischen Felder in der Elektrodynamik - zu einem antisymmetrischen Tensor zusammenfassen:

$$(J^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -K_x & -K_y & -K_z \\ K_x & 0 & J_z & -J_y \\ K_y & -J_z & 0 & J_x \\ K_z & J_y & -J_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow K^k = -J^{0k} = J^{k0}, \quad J^{ij} = \varepsilon^{ijk} J^k$$

Definiert man analog

$$\phi^k = -\omega^{0k} = \omega^{k0}, \quad \omega^{ij} = \varepsilon^{ijk} \theta^k$$

$$(\Leftrightarrow \phi^k = \omega_{0k} = -\omega_{k0}, \quad \omega_{ij} = \varepsilon^{ijk} \theta^k),$$

ergibt sich für die Transformation von Vierervektoren (→ Übung):

$$x \longrightarrow \exp(-i(\vec{J}\cdot\vec{\theta} - \vec{K}\cdot\vec{\phi}))\, x$$

$$= \exp(-\tfrac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu})\, x$$

Für die Lorentz-Algebra ergibt sich dann (→ Übung)

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i\,(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho})$$

In den Übungen wird ferner gezeigt, dass

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

diese Vertauschungsrelationen erfüllen, wobei man dafür lediglich die Antivertauschungsrelationen der γ-Matrizen,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu}$$

voraussetzen muss.

⇒ Die $S^{\mu\nu}$ sind eine Darstellung der Lorentz-Algebra.

Behauptung:
Dirac-Spinoren transformieren sich gemäß

$$\boxed{\psi \to \exp\left(-\tfrac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right)\psi} \qquad (*)$$

Um das zu sehen, werten wir den Exponenten konkret in Weyl-Darstellung aus.

$$-\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = \frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{1}{4}\,\omega_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu,$$

da $\omega_{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist ($\Rightarrow \omega_{\mu\mu} = 0$).

$$\Rightarrow -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[\phi^k \underbrace{(\gamma^0\gamma^k - \gamma^k\gamma^0)}_{=2\gamma^0\gamma^k} + \varepsilon^{ijk}\theta^k\gamma^i\gamma^j\right]$$

Weyl - Darstellung:

$$\gamma^0\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \overset{i\neq 0}{=} i\varepsilon^{ijl}\begin{pmatrix} -\sigma^l & 0 \\ 0 & -\sigma^l \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$$

$$\Rightarrow -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\phi}\cdot\vec{\sigma} \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \psi \longrightarrow \exp\left[\begin{pmatrix} -i\frac{\vec{\sigma}}{2}(\vec{\theta} - i\vec{\phi}) & 0 \\ 0 & -i\frac{\vec{\sigma}}{2}(\vec{\theta} + i\vec{\phi}) \end{pmatrix}\right]\psi$$

Das entspricht genau dem Transformationsverhalten, das wir Abschnitt III. 2.3 hergeleitet haben. Die Vorschrift (*) hat jedoch den Vorteil, dass sie für beliebige Darstellungen der γ-Matrizen gilt und daher allgemeiner ist.

Vektoren und Dirac - Spinoren transformieren sich also wie folgt:

$$x \longrightarrow x' = \Lambda x\,, \qquad \Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)$$

$$\psi \longrightarrow \psi' = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi\,, \qquad \Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)$$

Eine wichtige Beziehung lautet dann

$$\Lambda^{-1}_{1/2}\, \gamma^\alpha \Lambda_{1/2} = \Lambda^\alpha{}_\beta\, \gamma^\beta \qquad (**)$$

Beweisskizze:

Wir können uns wieder auf infinitesimale Transformationen beschränken.

$$\Rightarrow \Lambda_{1/2} = 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \Leftrightarrow \Lambda^{-1}_{1/2} = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \Lambda^{-1}_{1/2}\, \gamma^\alpha \Lambda_{1/2} = \gamma^\alpha + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} \underbrace{[S^{\mu\nu}, \gamma^\alpha]}_{-i(g^{\alpha\mu}\gamma^\nu - g^{\alpha\nu}\gamma^\mu)}$$

$$= \gamma^\alpha + \frac{1}{2}(\omega^\alpha{}_\nu \gamma^\nu - \omega_\mu{}^\alpha \gamma^\mu)$$

$$= (g^\alpha{}_\nu + \omega^\alpha{}_\nu)\gamma^\nu$$

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}\right)^\alpha{}_\beta$$

$$= g^\alpha{}_\beta - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} \underbrace{(J^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta}_{i(g^{\mu\alpha}g^\nu{}_\beta - g^\mu{}_\beta g^{\nu\alpha})}$$

(vgl. Übungsblatt)

$$\Rightarrow \Lambda^\alpha{}_\beta \gamma^\beta = \left(g^\alpha{}_\beta + \frac{1}{2}(\omega^\alpha{}_\beta - \omega_\beta{}^\alpha)\right)\gamma^\beta$$

$$= (g^\alpha{}_\nu + \omega^\alpha{}_\nu)\gamma^\nu \quad \checkmark$$

Damit können wir jetzt die Forminvarianz der Dirac-Gleichung zeigen:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi'(x)$$

$$= \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right) \Lambda_{1/2}\, \psi(\Lambda^{-1}x)$$

$$= \Lambda_{1/2} \Big(i \underbrace{\Lambda_{1/2}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{1/2}}_{\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \Big)\, \psi(\Lambda^{-1}x)$$

$$\overset{y = \Lambda^{-1}x}{=} \Lambda_{1/2} \left(i \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\sigma} - m \right) \psi(y) \Big|_{y=\Lambda^{-1}x}$$

$$= \Lambda_{1/2} \Big(i\gamma^\nu \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu}_{= g^\sigma{}_\nu} \frac{\partial}{\partial y^\sigma} - m \Big) \psi(y) \Big|_{y=\Lambda^{-1}x}$$

$$= \Lambda_{1/2} \underbrace{\left(i\gamma^\sigma \frac{\partial}{\partial y^\sigma} - m \right) \psi(y)}_{=0} \Big|_{y=\Lambda^{-1}x}$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

weitere Eigenschaft: $\gamma^0 \Lambda_{1/2}^\dagger \gamma^0 = \Lambda_{1/2}^{-1}$ (→ Übung)

$$\Rightarrow \bar\psi(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0 \longrightarrow \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x)\Lambda_{\frac12}^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x)\gamma^0\gamma^0\Lambda_{\frac12}^\dagger\gamma^0$$
$$= \bar\psi(\Lambda^{-1}x)\,\Lambda_{1/2}^{-1}$$

$$\Rightarrow \bar\psi(x)\psi(x) \longrightarrow \bar\psi(\Lambda^{-1}x)\Lambda_{\frac12}^{-1}\Lambda_{\frac12}\psi(\Lambda^{-1}x) = \bar\psi(\Lambda^{-1}x)\psi(\Lambda x)$$

Lorentz-Skalar!

$$\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x) \to \bar\psi(\Lambda^{-1}x)\underbrace{\Lambda_{\frac12}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{1/2}}_{\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu}\psi(\Lambda^{-1}x) = \Lambda^\mu{}_\nu\,\bar\psi(\Lambda^{-1}x)\gamma^\nu\psi(\Lambda^{-1}x)$$

Lorentz-Vektor!

III. 3 Lösungen der freien Dirac-Gleichung

Lösungen der Dirac-Gl. erfüllen die Klein-Gordon-Gl. $\rightsquigarrow$ ebene Wellen mit $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$

2) Lösungsansätze:

pos. Frequenz: $\psi_+(x) = u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x}$

neg. " : $\psi_-(x) = v(\vec{p})\, e^{+ip\cdot x}$

mit $p = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p \\ \vec{p} \end{pmatrix}$, $E_p = +\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$

Einsetzen in die Dirac-Gl.:

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} = (\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x}$$

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, v(\vec{p})\, e^{ip\cdot x} = (-\gamma^\mu p_\mu - m)\, v(\vec{p})\, e^{ip\cdot x}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\not{p} - m)\, u(\vec{p}) = 0 \,, \quad (\not{p} + m)\, v(\vec{p}) = 0}$$

i) Lösungen positiver Frequenz

Wir suchen zunächst die Lösungen im Ruhesystem: $p = \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (m\gamma^0 - m)\, u(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Weyl Darst.}}}{=} m \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} u(\vec{0}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u(\vec{0}) = N \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$: 2-komp. Spinor

Normierungskonvention: $\xi^\dagger \xi = 1$, $N = \sqrt{m}$
(wird sich als praktisch erweisen)

Das Ergebnis ist konsistent mit unserer Annahme auf S. III-12, wonach

$\psi = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}$ mit $\phi_L(\vec{0}) = \phi_R(\vec{0})$ gilt.

Wir können daher direkt auf die dort gefundenen geboosteten Ausdrücke

$$\phi_{\substack{L \\ R}}(\vec{p}) = \frac{E + m \mp \vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} \, \phi_{\substack{L \\ R}}(\vec{0}) \quad , \quad E \equiv E_p$$

zurückgreifen, um $u(\vec{p})$ zu erhalten. Unter Berücksichtigung des Normierungsfaktors $\sqrt{m}$ ergibt sich

$$u(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [E + m - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\, \xi \\ [E + m + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\, \xi \end{pmatrix}$$

Alternativ kann man das schreiben als

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\; \xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\; \xi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (\sigma^\mu) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (\bar{\sigma}^\mu) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ -\vec{\sigma} \end{pmatrix},$$