$$\Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \longrightarrow x' = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

$$\equiv B_x \, x$$

mit $\phi := \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v}$ „Rapidität"

$$\Rightarrow \cosh\phi = \gamma \quad , \quad \sinh\phi = \gamma v$$

Generator: $K_x = -i \left.\frac{\partial B_x}{\partial \phi}\right|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad B_x(\phi) = \exp(i K_x \phi) \quad ,$$

Analog: Boost in y-Richtung $\to B_y \to K_y$

" " z- " $\to B_z \to K_z$

Einbettung der Generatoren der Rotationsgruppe in die 4-dim Raumzeit

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_x = \ldots \quad , \quad J_y = \ldots$$

$$\Rightarrow \quad x' = \exp[-i(\vec{J}\cdot\vec{\Theta} - \vec{K}\cdot\vec{\phi})]\, x$$

Kommutatoren:

$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k$ (wie gehabt)

$[K^i, K^j] = -i\varepsilon^{ijk} J^k$

$[J^i, K^j] = i\varepsilon^{ijk} K^k$

$[J^i, K^i] = 0$

=> Boosts alleine bilden keine Gruppe, jedoch die Kombination von Boosts mit Rotationen („eigentliche Lorentz-Gruppe")

(z.B. Abfolge $v_x \vec{e}_x$, $v_y \vec{e}_y$, $-v_x \vec{e}_x$, $-v_y \vec{e}_y$
-> Drehung um die z-Achse)

Linearkombinationen:

$A^k := \frac{1}{2}(J^k + iK^k)$

$B^k := \frac{1}{2}(J^k - iK^k)$

$\hookrightarrow$ $[A^i, A^j] = i\varepsilon^{ijk} A^k$

$[B^i, B^j] = i\varepsilon^{ijk} B^k$

$[A^i, B^j] = 0$

=> $\vec{A}$ und $\vec{B}$ erzeugen zwei mit einander kommutierende SU(2)-Gruppen

$\Rightarrow$ eigentliche Lorentz-Gruppe $\hat{=}$ $SU(2) \otimes SU(2)$

$\hookrightarrow$ Zustände : (j_A, j_B)

<u>Spezialfälle :</u>

- $(j_A = j,\ j_B = 0) \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{K} = -i\vec{J}^{(j)}$
- $(j_A = 0,\ j_B = j) \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{K} = i\vec{J}^{(j)}$

2j+1-dim Darst der SU(2)

<u>Spin - $\frac{1}{2}$:</u>

i) <u>$(\frac{1}{2}, 0)$:</u> $\quad \vec{J}^{(\frac{1}{2})} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2}$

$\hookrightarrow$ Transformation eines Pauli-Spinors

$$\xi \rightarrow \exp[-i(\vec{J}\cdot\vec{\Theta} - \vec{K}\cdot\vec{\Phi})]\,\xi$$

$$= \exp\left[-i\frac{\vec{\sigma}}{2}(\vec{\Theta} + i\vec{\Phi})\right]\xi \quad =: \mathcal{D}(\Lambda)\,\xi$$

ii) <u>$(0, \frac{1}{2})$:</u> $\quad \vec{J}^{(\frac{1}{2})} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}$

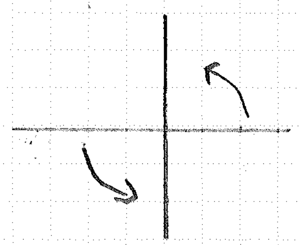
$$\eta \rightarrow \exp\left[-i\frac{\vec{\sigma}}{2}(\vec{\Theta} - i\vec{\Phi})\right]\eta \quad =: \bar{\mathcal{D}}(\Lambda)\,\eta$$

$\mathcal{D}$ und $\bar{\mathcal{D}}$ sind nicht unitär !
Das ist aber kein Problem, wenn wir ξ und η als (zunächst klassische) Felder auffassen und nicht mit einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation verbinden.

Paritätstransformation (= Raumspiegelung)

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \longrightarrow x' = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \vec{v} \to -\vec{v} \quad \Rightarrow \quad$ Boosts : $\quad \vec{K} \to -\vec{K}$ (Vektor)



Rotationen : $\vec{J} \to \vec{J}$ (Axialvektor)

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} (j, 0) & \longleftrightarrow & (0, j) \\ \xi & \longleftrightarrow & \eta \end{matrix}\right\} \text{ unter Paritäts-transformationen}$$

$\Rightarrow$ Die Paritätstransf. koppelt die beiden SU(2) - Gruppen

$\hookrightarrow$ Fasse die beiden 2-Spinoren zu einem 4-Spinor zusammen :

$$\psi := \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}$$

L/R : „links / rechtshändig" (s. später)

eigentl. Lorentz-Transf. :

$$\psi \to S(\Lambda)\,\psi = \begin{pmatrix} \bar{D}(\Lambda) & 0 \\ 0 & D(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}$$

Parität : $\quad \psi \to \begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1 \\ 1\!\!1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}$

Betrachte reinen Lorentz-Boost, der ein ruhendes Teilchen in ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ überführt:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \gamma m v \hat{p} = m \sinh\phi \; \hat{p}$$
$$E = \gamma m = m \cosh\phi$$

($\hat{p}$ = Einheitsvektor in Richtung des Boosts)

$$\Rightarrow \quad \phi_R(\vec{p}) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\phi}\right)\phi_R(0) \quad , \quad \vec{\phi} = \phi\,\hat{p}$$
$$= \left[\cosh\left(\tfrac{\phi}{2}\right) + \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\,\sinh\left(\tfrac{\phi}{2}\right)\right]\phi_R(0)$$
$$= \frac{E + m + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\,\phi_R(0)$$

(→ Übung)

analog:

$$\phi_L(\vec{p}) = \frac{E + m - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\,\phi_L(0)$$

Für ruhende Teilchen sollte es keinen Unterschied zwischen rechts- und linkshändig (Spin in oder entgegen der Bewegungsrichtung) geben:

$$\phi_R(0) = \phi_L(0)$$

$$\overset{\text{Übung}}{\Rightarrow} \quad \phi_R(\vec{p}) = \frac{E + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m}\,\phi_L(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad \phi_L(\vec{p}) = \frac{E - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m}\,\phi_R(\vec{p})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -m & p_0 - \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ p_0 + \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L(\vec{p}) \\ \phi_R(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad p_0 = E$$

$\rightarrow$ Def.: $\quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = \sigma^k p^k = -\sigma^k p_k$$

$\Rightarrow \quad (\gamma^\mu p_\mu - m)\,\psi(p) = 0 \quad$ Dirac-Gl. im Impulsraum!

Fourier-Transformation:

$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0 \quad$ Dirac-Gleichung

<u>Spezialfall $m = 0$</u>

$\Rightarrow$ Die Gleichungen für ϕ_L und ϕ_R entkoppeln:

$$\left.\begin{aligned} (p_0 - \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\phi_R(\vec{p}) &= 0 \\ (p_0 + \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\phi_L(\vec{p}) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{„Weyl-Gleichungen"}$$

$m = 0 \Rightarrow p_0 = |\vec{p}|$

$$\Rightarrow \quad \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\;\phi_{R/L} = \pm\,\phi_{R/L}$$

d.h. ϕ_R und ϕ_L sind Eigenfunktionen von $\vec{\sigma}\cdot\hat{p}$ mit Eigenwerten ± 1 $\hat{=}$ Spin-Projektion parallel/antiparallel zum Impuls $\hat{=}$ rechts-/linkshändig.