$$\Rightarrow \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\, G(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-y)} (-p^2+m^2)\, \tilde{G}(p)$$

$$\stackrel{!}{=} -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-y)}$$

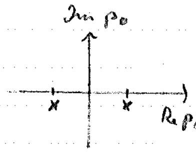
$$\Rightarrow \quad \tilde{G}(p) = \frac{i}{p^2-m^2}$$

$$\Rightarrow \quad G(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-y)} \frac{i}{p^2-m^2}$$

$$\frac{1}{p^2-m^2} = \frac{1}{p_0^2-\vec{p}^{\,2}-m^2} = \frac{1}{p_0^2-E_p^2} = \frac{1}{2E_p}\left(\frac{1}{p_0-E_p} - \frac{1}{p_0+E_p}\right)$$

$$\Rightarrow \quad G(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \frac{1}{2E_p} \underbrace{i \int \frac{dp_0}{2\pi}\, e^{-ip^0(x^0-y^0)} \left(\frac{1}{p_0-E_p} - \frac{1}{p_0+E_p}\right)}_{=:\, F(x^0-y^0)}$$

Infinitesimale Verschiebung der Pole bei $p_0 = \pm E_p$ in die komplexe Ebene:



1. Variante: $\quad p_0 \to p_0 + i\varepsilon \qquad$ Pole bei $p_0 = \pm E_p - i\varepsilon$

$$\Rightarrow \quad F(x^0-y^0) \to i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi}\, e^{-ip^0(x^0-y^0)} \left(\frac{1}{p_0-E_p+i\varepsilon} - \frac{1}{p_0+E_p+i\varepsilon}\right)$$

Schließe Integrationskontur so, dass der Kreisbogen keinen Beitrag liefert

$x^0-y^0 > 0$: $\quad \leadsto \; i \oint \frac{dp_0}{2\pi} \ldots \quad \leadsto$ Pole bei $p_0 = \pm E_p - i\varepsilon$

$$\Rightarrow \quad F(x^0-y^0) = -2\pi i \, \frac{i}{2\pi} \left(e^{-iE_p(x^0-y^0)} - e^{iE_p(x^0-y^0)}\right)$$

$$= e^{-iE_p(x^0-y^0)} - e^{iE_p(x^0-y^0)}$$

$x^0-y^0<0$: $\rightsquigarrow i\oint \frac{dp_0}{2\pi}\dots$ $\rightsquigarrow$ keine Pole innerhalb des Integrationsweges

$$\Rightarrow F(x^0-y^0)=0$$

$$\Rightarrow G(x-y)\longrightarrow \theta(x^0-y^0)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\frac{1}{2E_p}\left(e^{-iE_p(x^0-y^0)}-e^{iE_p(x^0-y^0)}\right)$$

$$=\theta(x^0-y^0)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_p}\left(e^{-ip\cdot(x-y)}-e^{ip\cdot(x-y)}\right)\Big|_{p^0=E_p}$$

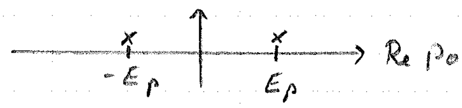
Subst. $\vec{p}\to-\vec{p}$ im zweiten Term

$=: D_R(x-y)$ „retardierter Propagator"

Vergleich mit S. II-20:

$$\boxed{D_R(x-y)=\theta(x^0-y^0)\,[\phi(x),\phi(y)]}$$

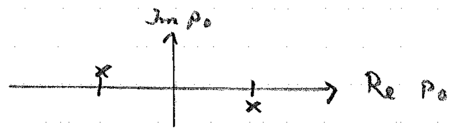
2. Variante: $p_0\to p_0-i\varepsilon$ $\rightsquigarrow$ Pole bei $p_0=\pm E_p+i\varepsilon$



$\rightsquigarrow$ avancierter Propagator

$$\boxed{D_A(x-y)=\theta(y^0-x^0)\,[\phi(y),\phi(x)]}$$

3. Variante: $E_p\to E_p-i\varepsilon$ $\rightsquigarrow$ Pole bei $p_0=\pm(E_p-i\varepsilon)$



$\rightsquigarrow$ „Feynman-Propagator"

$$D_F(x-y)=i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{-ip\cdot(x-y)}\frac{1}{2E_p}\left(\frac{1}{p_0-E_p+i\varepsilon}-\frac{1}{p_0+E_p-i\varepsilon}\right)$$

2) $$\boxed{\begin{aligned} D_F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-y)} \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} \\ &= \theta(x^0-y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle \\ &\quad + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle \\ &=: \langle 0|T\,\phi(x)\phi(y)|0\rangle \end{aligned}}$$

T = Zeitordnungsoperator:
ordnet die nachfolgenden Operatoren nach ihrem Zeitargument (frühester nach rechts, spätester nach links).

- D_R, D_A und D_F sind ebenfalls Green'sche Funktionen zum Klein-Gordon-Operator.