$$\Rightarrow \quad i\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) = [\phi(x), H] \qquad \text{(Heisenberg'sche Bewegungsgl.)}$$

$$= \ldots = i\pi(x)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\pi(x) = \ldots = i(\vec{\nabla}^2 - m^2)\phi(x)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x) = (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x) \qquad \text{Klein-Gordon-Gl.} \checkmark$$

Zeitabhängigkeit der Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren:

$$[H, a_{\vec{p}}] = -E_p a_{\vec{p}} \quad \Rightarrow \quad H a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}(H - E_p)$$

$$\Rightarrow \quad H^n a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}(H - E_p)^n$$

$$\Rightarrow \quad e^{iHt} a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}\, e^{i(H - E_p)t}$$

$$\Rightarrow \quad e^{iHt} a_{\vec{p}}\, e^{-iHt} = a_{\vec{p}}\, e^{-iE_p t}$$

$$e^{iHt} a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-iHt} = a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{iE_p t} \qquad \text{(analog)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} \right)\Big|_{p_0 = E_p} \\ \pi(t, \vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial t}\phi(t, \vec{x}) \end{aligned}}$$

<u>Interpretation:</u>

- Teilchen-Bild: $\phi(x)$ = Linearkomb. von Erzeugern und Vernichtern
- Wellen-Bild: $\phi(x)$ = Linearkomb. von ebenen Wellen (Lösungen der Klein-Gordon-Gl.)

$\rightarrow$ Teilchen- und Wellenbild in der QFT eng verknüpft.

- $a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} = a_{\vec{p}}\, e^{-i(p_0 t - \vec{p}\cdot\vec{x})}$ , $p_0 \equiv E_p \equiv +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

  „Moden positiver Frequenz"

  vernichten Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Energie $E_p > 0$

  $a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} = a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{i(p_0 t - \vec{p}\cdot\vec{x})}$

  „Moden negativer Frequenz"

  erzeugen Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Energie $E_p > 0$

Zeitentwicklung: $\phi(x) = \phi(t, \vec{x}) = e^{iHt}\, \phi(0, \vec{x})\, e^{-iHt}$

analog: $\phi(\vec{x}) = e^{-i\vec{P}\cdot\vec{x}}\, \phi(\vec{0})\, e^{+i\vec{P}\cdot\vec{x}}$ ($\rightarrow$ Übung)

($\vec{P}$ = Impulsoperator)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \phi(x) = e^{i(Ht - \vec{P}\cdot\vec{x})}\, \phi(0)\, e^{-i(Ht - \vec{P}\cdot\vec{x})} = e^{iP\cdot x}\, \phi(0)\, e^{-iP\cdot x} \\ \text{mit} \quad (P^\mu) = \begin{pmatrix} H \\ \vec{P} \end{pmatrix} \end{array}}$$

## II.5 Kausalität

Amplitude für ein Teilchen von $y = \begin{pmatrix} y^0 \\ \vec{y} \end{pmatrix}$ nach $x = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ zu propagieren:

$$D(x-y) = \langle 0 | \phi(x)\, \phi(y) | 0 \rangle$$

$$= \int \underbrace{\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2E_p}}_{\text{Lorentz-inv. Integralmaß}}\, e^{-ip\cdot(x-y)} \qquad (\rightarrow \text{Übung})$$

Lorentz-Skalar

$\Rightarrow D(x-y)$ = Skalarfeld

1. Fall: $x-y$ zeitartig $\quad ((x-y)^2 > 0)$

o. B. d. A. $\quad x^0 - y^0 = t, \quad \vec{x} - \vec{y} = 0$

$$\Rightarrow D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-iE_p t} \xrightarrow[t \text{ sehr groß}]{} \sim e^{-imt}$$

2. Fall: $x-y$ raumartig $\quad ((x-y)^2 < 0)$

o. B. d. A $\quad x^0 - y^0 = 0, \quad \vec{x} - \vec{y} = \vec{r}$

$$\Rightarrow D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \xrightarrow[r=|\vec{r}| \text{ sehr groß}]{} \sim e^{-mr}, \quad r = |\vec{r}|$$

Kausalität verletzt?

Kausalität:
Eine Messung am Raumzeitpunkt $x$ darf eine Messung am Raumzeitpunkt $y$ nicht beeinflussen, wenn die Separation $x-y$ raumartig ist.

klassische Feldtheorie: Felder (z. B. $\vec{E}$-Feld) können an allen Raumzeitpunkten simultan beliebig genau gemessen werden.

QM: Observable können simultan scharf gemessen werden, wenn die zugehörigen Operatoren vertauschen.

→ Forderung in der QFT:

$$[\phi(x), \phi(y)] \overset{!}{=} 0 \qquad \text{für raumartige } (x-y)$$

„Mikrokausalität"

Überprüfung der Mikrokausalität:

$$[\phi(x), \phi(y)]$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \left[ a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{ip\cdot x}, a_{\vec{p}'} e^{-ip'\cdot y} + a_{\vec{p}'}^{\dagger} e^{ip'\cdot y} \right]$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \left( e^{-ip\cdot x + ip'\cdot y} - e^{ip\cdot x - ip'\cdot y} \right) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left( e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)} \right)$$

$$= D(x-y) - D(y-x)$$

- $(x-y)$ raumartig:

  $\Rightarrow$ $(y-x)$ kann durch eine Lorentz-Transf. in $(x-y)$ überführt werden.

  Da $D(y-x)$ Lorentz-invariant ist, folgt $D(y-x) = D(x-y)$.

  $$\Rightarrow [\phi(x), \phi(y)] = 0$$

  Kausalität nicht verletzt!

- Dies schließt auch Kausalität bezüglich anderer Operatoren mit ein, die Funktionen von $\phi(x)$ sind (wie $\pi(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial t}$).

- $(x-y)$ zeitartig:

  $(y-x)$ kann nicht durch eine Lorentz-Transf. in $(x-y)$ überführt werden.

  $$\Rightarrow [\phi(x), \phi(y)] \neq 0 \quad \text{möglich}$$

- komplexes Klein-Gordon Feld (→ Übung)

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( a_{\vec p}\, e^{-ip\cdot x} + b_{\vec p}^\dagger\, e^{ip\cdot x} \right)$$

$$\neq \phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( b_{\vec p}\, e^{-ip\cdot x} + a_{\vec p}^\dagger\, e^{ip\cdot x} \right)$$

$$[a_{\vec p}, a_{\vec p'}^\dagger] = [b_{\vec p}, b_{\vec p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec p - \vec p')$$

$$[a_{\vec p}, b_{\vec p}^\dagger] = (\text{alle anderen}) = 0$$

erhaltene Ladung: $\quad Q \sim \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p} - b_{\vec p}^\dagger b_{\vec p} \right)$

$\Rightarrow$ $a_{\vec p}^\dagger$ und $b_{\vec p}^\dagger$ erzeugen Teilchen entgegengesetzter Ladung und gleicher Masse: Teilchen und Antiteilchen!

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = D_a(x-y) - D_b(y-x)$$

Mikrokausalität:
Die Beiträge der von $y$ nach $x$ propagierenden Teilchen heben sich für raumartige $(x-y)$ mit den Beiträgen der von $x$ nach $y$ propagierenden Antiteilchen weg!

## II.6 Der Klein-Gordon-Propagator

Green'sche Funktion des Klein-Gordon-Operators:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\, G(x-y) = -i\,\delta^4(x-y)$$

Fourier-Transformation:

$$G(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)}\, \tilde G(p)$$