Klein-Gordon-Gl.: $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right) \phi(\vec{x},t) = 0$

$\Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{p}^2 + m^2)\right] \phi(\vec{p},t) = 0$

Vergleich mit harmon. Oszillator: $\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$

$\Rightarrow$ Jede Fourier-Mode entspricht einem harmon. Oszillator mit Frequenz $\omega_{\vec{p}} := \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

1) Betrachte quantenmechan. harmon. Oszillator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \equiv \frac{1}{2}\tilde{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \tilde{q}^2$$

mit $\tilde{q} := \sqrt{m}\, q$, $\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{m}}$ $\Rightarrow [\tilde{q}, \tilde{p}] = [q, p] = i$

2) Leiteroperatoren: $\tilde{q} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^+)$, $\tilde{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\,(a - a^+)$

mit $[a, a^+] = 1$

$\Rightarrow [\tilde{q}, \tilde{p}] = i$ ✓

und $H = \omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow [H, a^+] = \omega a^+$, $[H, a] = -\omega a$

Definiere $|0\rangle$ durch $a|0\rangle = 0$

und $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n |0\rangle$

$\Rightarrow H|0\rangle = \frac{1}{2}\omega |0\rangle$

$H|n\rangle = (n + \frac{1}{2})\omega |n\rangle$

$\rightarrow$ $\{|n\rangle\}$ sind die Eigenzustände von $H$ mit dem Energiespektrum $(n+\frac{1}{2})\omega$.
Insbesondere ist $|0\rangle$ der Grundzustand mit der Grundzustandsenergie $\frac{1}{2}\omega$.

Ferner gilt:
$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$
$$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

Analoges Vorgehen für Quantenfelder (Schrödinger-Bild):

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} + a^\dagger_{-\vec{p}} \right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left( a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left( a_{\vec{p}} - a^\dagger_{-\vec{p}} \right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

mit
$$[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \qquad \left( [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] = [a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}] = 0 \right)$$

$$\Rightarrow [\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (\rightarrow \text{Übung})$$

und

$$H = \int d^3x \left( \frac{1}{2}\pi^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi(\vec{x}))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(\vec{x}) \right)$$
$$= \ldots \qquad (\rightarrow \text{Übung})$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p \left( a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + \frac{1}{2}\underbrace{[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}]}_{(2\pi)^3\delta(0)} \right)$$

$\Rightarrow$ unendl. Vakuumenergie

Da nur Energiedifferenzen messbar sind, kann die unendliche Vakuumenergie – wie in der Löchertheorie – weggelassen werden.

Analog zum harmon. Oszillator gilt:

$$[H, a^\dagger_{\vec p}] = \omega_{\vec p}\, a^\dagger_{\vec p} \quad , \qquad [H, a_{\vec p}] = -\omega_{\vec p}\, a_{\vec p}$$

↳ <u>Grundzustand</u> (= „Vakuum"): $|0\rangle$ mit $a_{\vec p}|0\rangle = 0 \;\forall \vec p$

$\Rightarrow \quad H|0\rangle = 0$ (nach Weglassen der Nullpunktsenergien)

<u>angeregte Zustände</u>:

$a^\dagger_{\vec p_1} a^\dagger_{\vec p_2} \dots |0\rangle$ = Eigenzustand von $H$ mit Energie $\omega_{\vec p_1} + \omega_{\vec p_2} + \dots$

Beachte: $\omega_{\vec p} = +\sqrt{\vec p^2 + m^2}$

$\Rightarrow$ Alle Zustände haben positive Energie!

<u>Gesamtimpulsoperator</u> (vgl S. II-10):

$$\vec P = -\int d^3x\; \pi(\vec x)\, \vec\nabla\, \phi(\vec x)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2}\vec p \left( a^\dagger_{\vec p} a_{\vec p} - a^\dagger_{-\vec p} a_{-\vec p} + \underbrace{[a_{\vec p}, a^\dagger_{\vec p}] + a_{\vec p} a_{-\vec p} - a^\dagger_{-\vec p} a^\dagger_{\vec p}}_{\text{trägt nicht zum Integral bei (Integrand antisymm. in } \vec p\text{)}} \right)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \vec p\, a^\dagger_{\vec p} a_{\vec p}$$

$$\Rightarrow \quad \vec P\, a^\dagger_{\vec p}|0\rangle = \vec p\, a^\dagger_{\vec p}|0\rangle ,$$

$$\vec P\, a^\dagger_{\vec p_1} a^\dagger_{\vec p_2} \dots |0\rangle = (\vec p_1 + \vec p_2 + \dots)\, a^\dagger_{\vec p_1} a^\dagger_{\vec p_2} \dots |0\rangle$$

→ <u>Interpretation:</u>

$a^\dagger_{\vec p}$ erzeugt <u>Teilchen</u> mit Impuls $\vec p$

und Energie $\omega_{\vec p} = \sqrt{\vec p^{\,2} + m^2} \equiv E_p \equiv E_{\vec p}$

$$a^\dagger_{\vec p}\, a^\dagger_{\vec q}\, |0\rangle = a^\dagger_{\vec q}\, a^\dagger_{\vec p}\, |0\rangle$$

⇒ Die Klein-Gordon-Teilchen gehorchen der Bose-Einstein-Statistik!
Insbesondere können beliebig viele Teilchen mit gleichem Impuls erzeugt werden.

<u>Normierung:</u>

- Vakuum: $\langle 0 | 0 \rangle = 1$
- Ein-Teilchen-Zustände: $|\vec p\rangle = \sqrt{2E_{\vec p}}\; a^\dagger_{\vec p}\, |0\rangle$

$$\Rightarrow \langle \vec p | \vec q \rangle = 2E_{\vec p}\, (2\pi)^3\, \delta^3(\vec p - \vec q)$$

( Grund für Faktor $\sqrt{2E_{\vec p}}$

$(2\pi)^3 \delta^3(\vec p - \vec q) = \int d^3x\; e^{i(\vec p - \vec q)\cdot \vec x}$ ist nicht Lorentz-invariant

Lorentz-Boosts: $\sim$ Volumen $\sim \frac{1}{\gamma}$ wg Lorentz-Kontraktion

$E_{\vec p} \sim \gamma$

$$\Rightarrow E_p\, (2\pi)^3\, \delta^3(\vec p - \vec q) \quad \text{Lorentz-invariant}$$

Faktor 2 Konvention in Anlehnung an den Zusammenhang zwischen $\phi(\vec x)$ und $a_{\vec p}$ )

Vollständigkeitsrelation für Ein-Teilchen-Zustände:

$$(\mathbb{1})_{1\text{-Teilchen}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|$$

$$( \Rightarrow \quad \langle\vec{p}| (\mathbb{1})_{1\text{-Teilchen}} |\vec{q}\rangle = \langle\vec{p}|\vec{q}\rangle \quad \checkmark \quad )$$

( Beachte: $\underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}}}_{\text{Lorentz-invariantes Integralmaß}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi \, \delta(p^2 - m^2) \, \theta(p^0)$

„On-shell"-Bedingung ($p_0^2 = E_{\vec{p}}^2$) )

## Interpretation von $\phi(\vec{x})$:

$$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\vec{p}|\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}'}} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \langle\vec{p}|\vec{p}'\rangle = e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

Vergleich mit nichtrel. QM: $\langle\vec{p}|\vec{x}\rangle \sim e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$

$\Rightarrow$ $\phi(\vec{x})$ erzeugt ein Teilchen am Ort $\vec{x}$.

## II.4 Klein-Gordon-Feld im Heisenberg-Bild

Heisenberg-Bild: zeitabh. Operatoren $\Rightarrow$ zeitabh. Felder

$$\phi(x) = \phi(t,\vec{x}) = e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt}, \quad \phi(\vec{x}) \equiv \phi_S(\vec{x})$$

$$\pi(x) = \pi(t,\vec{x}) = e^{iHt} \pi(\vec{x}) e^{-iHt}$$