II. 2. 3 Das Noether - Theorem

Betrachte eine infinitesimale kontinuierliche Transformation des Feldes:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \, \Delta\phi(x)$$

α: infinites. Parameter; $\Delta\phi(x)$: Deformation des Feldes

Daraus ergibt sich eine Transformation der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \alpha \Delta \mathcal{L}$$

mit

$$\alpha \Delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\alpha \Delta \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\alpha \Delta \phi)$$

$$= \alpha \, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi \right) + \alpha \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right]}_{\substack{=0 \\ \text{(Euler-Lagrange-Gl.)}}} \Delta\phi$$

$$= \alpha \, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi \right)$$

„Symmetrietransformationen"

= Transformationen, die die Bewegungsgln. invar. lassen.

Das ist der Fall, wenn $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \alpha \, \partial_\mu J^\mu$ mit einem beliebigen Vektorfeld $J^\mu(x)$

($\Rightarrow$ $S \longrightarrow S' = S +$ Oberflächenintegral über J^μ, das keinen Beitrag zur Bewegungsgl. liefert, da $\delta\phi(x) = 0$ auf $\partial\Omega$ vorausgesetzt wurde.)

Für Symmetrietransformationen gilt also

$$\alpha\, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi \right) \overset{!}{=} \alpha\, \partial_\mu J^\mu$$

2, erhaltener Strom:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \qquad \text{mit} \quad j^\mu(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi(x) - J^\mu(x)}$$

Jede kontinuierliche Symmetrie ist mit einem erhaltenen Strom verbunden!

erhaltene Ladung:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \partial_0 j^0(x) + \partial_k j^k(x)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t} j^0(t,\vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t,\vec{x})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V d^3x\, j^0(t,\vec{x}) = \int_V d^3x\, \frac{\partial}{\partial t} j^0(t,\vec{x})$$
$$= - \int_V d^3x\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t,\vec{x})$$
$$= - \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{j}(t,\vec{x}) \qquad = 0$$

unter der Annahme, dass $\vec{j} = 0$ auf ∂V

2, erhaltene Ladung:

$$\boxed{\frac{d}{dt} Q(t) = 0 \qquad \text{mit} \quad Q(t) := \int_V d^3x\, j^0(t,\vec{x})}$$

Bemerkung:

In den meisten Fällen ist V der gesamte dreidim. Raum. Die Ladung ist dann erhalten, wenn $\vec{j}$ im Unendlichen genügend schnell abfällt.

• Falls die Symmetrietransf. mehrere Felder umfasst, muss über diese Felder summiert werden:

$$j^\mu(x) = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_n)} \Delta\phi_n(x) - J^\mu(x)$$

<u>Beispiel:</u> komplexes Klein-Gordon-Feld

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2 \qquad (\phi_1, \phi_2 \text{ reelle Felder})$$

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2|\phi|^2 \equiv \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

ist invariant unter $\phi \to e^{i\alpha}\phi$ $\quad (\Rightarrow J^\mu = 0)$

$\Rightarrow$ erhaltener Strom:

$$j^\mu = i\left[(\partial^\mu \phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu \phi)\right] \qquad (\to \text{Übung})$$

(Bemerkung:
Hier muss über die unabhängigen Felder ϕ_1 und ϕ_2 summiert werden. Äquivalent – und technisch einfacher – ist es ϕ und ϕ^* als unabhängige Felder aufzufassen.)

<u>Raum-Zeit-Transformationen</u>

Betrachte $x^\nu \to x^\nu - a^\nu$ $\quad$ (a^ν infinitesimal)

Das entspricht einer Transformation des Feldes

$$\phi(x) \to \phi(x+a) = \phi(x) + \partial_\nu \phi(x)\, a^\nu$$

(Dies sind vier Transformationen, ein für jede Komponente!)

Da $\mathcal{L}$ (wie ϕ) ein Skalarfeld ist, transformiert es sich genauso.

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\nu \mathcal{L}\, a^\nu = \mathcal{L} + a^\nu \partial_\mu \mathcal{L}\, g^\mu{}_\nu$$

$\alpha = a^\nu$

$$\Rightarrow \quad (\Delta\phi)_\nu = \partial_\nu \phi \, , \qquad J^\mu{}_\nu = \mathcal{L}\, g^\mu{}_\nu \, , \qquad \nu = 0, \dots, 3$$

$\curvearrowright$ 4 erhaltene Ströme:

$$\boxed{\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \quad \text{mit} \quad T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L}\, g^\mu{}_\nu}$$

$(T^{\mu\nu})$ = „Energie - Impuls - Tensor"

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \equiv \mathcal{H}$$

$\curvearrowright$ erhaltene Ladung: $\int d^3x\, \mathcal{H} = H \equiv E$

Energieerhaltung!

$$T^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \partial^i \phi = -\pi(x)\, \partial_i \phi(x)$$

$$\curvearrowright \quad P^i := \int d^3x\, T^{0i} = -\int d^3x\, \pi(x)\, \partial_i \phi(x)$$

$\hat{=}$ erhaltener Impuls des Feldes

($\neq$ kanon. konjugierter Impuls!)

II.3 Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes

Quantisierung der klass. Mechanik:

Koordinaten und Impulse $\longrightarrow$ Operatoren

mit
$$[q_m, p_n] = i\,\delta_{mn} \quad ,$$
$$[q_m, q_n] = [p_m, p_n] = 0$$

(gilt im Schrödinger-Bild oder im Heisenberg-Bild zu gleichen Zeiten: $[q_m(t), p_n(t)] = i\,\delta_{mn}$ etc.)

Analoges Vorgehen für Felder:

$$\boxed{\begin{aligned} &[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}\,')] = i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,') \\ &[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{x}\,')] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{x}\,')] = 0 \end{aligned}}$$

(im Schrödinger-Bild;
Heisenberg-Bild: $[\phi(\vec{x},t), \pi(\vec{x}\,',t)] = i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,')$ etc.)

ϕ, π Operatoren $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ ebenfalls Operator
$\Rightarrow$ H " "

Berechnung des Eigenwert-Spektrums von H

Fourier-Transformation des klassischen Feldes:

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\, \phi(\vec{p},t)$$