# II. Skalare Teilchen: Das Klein-Gordon-Feld

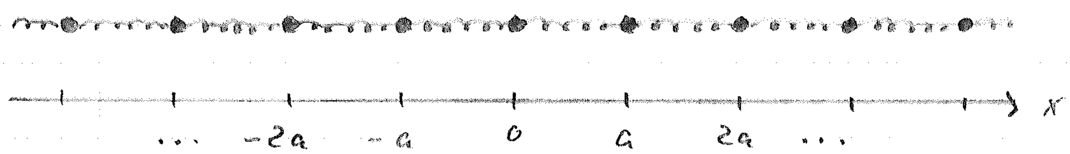
## II.1 Kontinuumsmechanik in 1+1 Dimensionen: longitudinal schwingende Saite

Ziel: Verallgemeinerung des Lagrange-Formalismus von einem System mit diskreten Freiheitsgraden (z.B. n Punktmassen) auf ein System mit kontinuierlichen Freiheitsgraden (z.B. Feld als Funktion des Ortes).

Beispiel: longitudinal schwingende „Saite"

Schritt 1:

Saite als Kette diskreter Atome, die mit ihren nächsten Nachbarn über Federn wechselwirken (gleiche Massen $m$, gleiche Federkonstanten $D$, $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$)




- Ruhelage des n-ten Atoms: $x_n = na$, $-N \leq n \leq N$
- generalisierte Koordinaten:
  $q_n(t)$ = Auslenkung des n-ten Atoms aus seiner Ruhelage
- Vereinfachung: $N \to \infty$ (⇒ keine Randeffekte)

⇒ kinet. Energie des n-ten Atoms: $T_n = \frac{1}{2} m \dot{q}_n^2$

pot. Energie der n-ten Feder: $V_n = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (q_{n+1} - q_n)^2$

⇝ <u>Lagrange-Fkt.:</u>

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_n - V_n) = \frac{1}{2} m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \dot{q}_n^2 - \omega_0^2 (q_{n+1} - q_n)^2 \right\}$$

Euler-Lagrange: $\quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$

⇝ <u>Bewegungsgleichung:</u>

$$\ddot{q}_n = \omega_0^2 (q_{n+1} - 2 q_n + q_{n-1})$$

<u>Lösungsansatz:</u>

$$q_n(t) = A\, e^{i(k x_n - \omega t)} \qquad \text{(ebene Welle)}$$

$$\Rightarrow q_{n\pm 1}(t) = q_n(t)\, e^{\pm ika},$$

$$\ddot{q}_n(t) = -\omega^2 q_n(t)$$

⇝ $\quad \omega^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos(ka)) \qquad$ (Dispersionsrelation)

Insbesondere ergibt sich für kleine Impulse $k$:

$$\cos(ka) \approx 1 - \frac{1}{2} k^2 a^2$$

$\Rightarrow \omega = \pm \omega_0 k a \quad$ ⇝ linear in $k$

⇝ Phasengeschwindigkeit: $\quad \left|\frac{\omega}{k}\right| = \omega_0 a =: c$

(Höhere Ordnungen: $\quad \cos(ka) = 1 - \frac{1}{2} k^2 a^2 + \mathcal{O}((ka)^4)$

⇝ $\left|\frac{\omega}{k}\right| = \omega_0 a \left(1 + \mathcal{O}((ka)^2)\right) = c(k) \quad$)

Schritt 2:

Kontinuumslimes: $\qquad a \longrightarrow 0$

mit der Nebenbedingung $\quad \varrho := \frac{m}{a} = \text{const.}, \quad c_0 = \omega_0 a = \text{const}$

generalisierte Koordinaten: $\quad q_n(t) \equiv q(x_n, t) \longrightarrow q(x,t)$,

d.h. der diskrete Index $n$ wird durch den kontinuierlichen Parameter $x$ ersetzt.

(Beachte: $x_n$ ist keine zeitabhängige Variable, sondern die konstante Ruhelage des $n$-ten Atoms. Ebenso ist $x$ keine zeitabhängige Variable, sondern parametrisiert – wie die Zeit $t$ – die dynamischen Variablen $q(x,t)$ und $\dot{q}(x,t)$)

$$\Rightarrow \quad T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \dot{q}_n^2 = \sum a \cdot \frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{q}^2(x_n, t)$$

$$= \sum \Delta x \ \frac{1}{2} \varrho \ \dot{q}^2(x_n, t)$$

$$\xrightarrow{a \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \frac{1}{2} \varrho \ \dot{q}^2(x,t)$$

$$V = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left( q_{n+1}(t) - q_n(t) \right)^2$$

$$= \sum a \frac{1}{2} \frac{m}{a} (\omega_0 a)^2 \left( \frac{q_{n+1}(t) - q_n(t)}{a} \right)^2$$

$$= \sum \Delta x \ \frac{1}{2} \varrho \ c_0^2 \left( \frac{q(x_n + a, t) - q_n(x,t)}{a} \right)^2$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \frac{1}{2} \varrho \ c_0^2 \left( \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \right)^2$$

$$\Rightarrow \quad L \to \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \varrho \ \dot{q}^2(x,t) - \frac{1}{2} \varrho \ c_0^2 \left( \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right]}_{=: \mathcal{L}\left(q, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x}\right)}$$

„Lagrange-Dichte"

(in 1+1 Dimensionen)

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q}_n = \omega_0^2 \left( q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} \right) = (\omega_0 a)^2 \frac{1}{a} \left[ \frac{q_{n+1} - q_n}{a} - \frac{q_n - q_{n-1}}{a} \right]$$

$$\hookrightarrow \quad \ddot{q}(x,t) = c_0^2 \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Box q(x,t) = 0 \qquad \text{mit} \quad \Box := \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Lösungen: $q(x,t) = A\, e^{i(kx - \omega t)}$ mit $\omega = \pm c_0 k$

(konstante Phasengeschwindigkeit für alle $k$, da die $\mathcal{O}((ka)^2)$-Korrekturen für $a \to 0$ verschwinden)

## II.2 Klassische Theorie skalarer relativistischer Felder

### II.2.1 Lagrange Formalismus

$\phi(x)$ skalares Feld (in 3+1 Dimensionen, $x = \binom{t}{\vec{x}}$ )

Wirkung: $S = \int dt\, L = \int_\Omega d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$

auf einem Gebiet $\Omega$

Hamilton'sches Prinzip:

$S$ = extremal bzgl. Variationen $\phi \to \phi + \delta\phi$ mit $\delta\phi = 0$ auf dem Rand von $\Omega$:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right\} = 0$$

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta\phi$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \underbrace{\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right)}_{\substack{\text{kann in ein Integral} \\ \text{über den Rand } \partial\Omega \\ \text{umgewandelt werden} \\ \to \text{trägt nicht bei,} \\ \text{da } \delta\phi = 0 \text{ auf } \partial\Omega.}} - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) \delta\phi \right\}$$

$$= \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right\} \delta\phi$$

$\delta\phi$ beliebig

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0} \qquad \text{(Euler-Lagrange-Gleichung)}$$

## II. 2. 2 Hamilton-Formalismus

(wichtig für die spätere Quantisierung der Felder)

<u>klass. Mechanik für Punkt-Teilchen:</u> $\quad L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$

kanon. konj. Impuls: $\quad p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Hamilton-Fkt.: $\quad H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$

<u>Feldtheorie:</u> $\quad L = \int d^3x \, \mathcal{L}(\phi(\vec{x},t), \dot{\phi}(\vec{x},t), \vec{\nabla}\phi(\vec{x},t))$

diskretisiertes Integral:

$$L \approx \sum_i \overset{\swarrow\,\text{Volumenelement}}{\Delta V_i} \, \mathcal{L}_i(\phi_i(t), \dot{\phi}_i(t), \vec{\nabla}\phi_i(t))$$

( $\phi_i(t) \equiv \phi(\vec{x}_i, t)$ ,

$\vec{\nabla}\phi_i$ definiert über Differenzenquotienten mit nächsten Nachbarn, spielt hier keine größere Rolle )

$$\Rightarrow \quad p_j(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi_j(t)} = \Delta V_j \, \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \dot\phi_j(t)} \equiv \Delta V_j \, \pi_j(t)$$

mit
$$\pi_j(t) = \frac{p_j(t)}{\Delta V_j} = \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \dot\phi_j(t)}$$

$$\hookrightarrow \quad H = \sum_i \Delta V_i \left( \pi_i \phi_i - \mathcal{L}_i \right) \equiv \sum_i \Delta V_i \, \mathcal{H}_i$$

Übergang zum Kontinuum: $\quad \Delta V_i \to d^3x$

2) 
$$\boxed{\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi(x)} \quad && \text{zu } \phi(x) \text{ konjugierte Impuls}\underline{\text{dichte}} \\ H &= \int d^3x \; \mathcal{H}(x) && \\ \mathcal{H}(x) &= \pi(x)\,\dot\phi(x) - \mathcal{L} && \text{Hamilton-Dichte} \end{aligned}}$$

( Bemerkung:

Streng genommen müssten wir schreiben

$$\pi(x) = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi} \right|_{\phi = \phi(x),\ \partial_\mu \phi = \partial_\mu \phi(x)}$$

( „normale" Ableitung nach $\dot\phi$, keine Funktionalableitung!)

<u>Beispiel:</u>

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[ (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2 \right] = \frac{1}{2}\left[ \dot\phi^2 - (\vec\nabla \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right]$$

Euler-Lagrange-Gleichung: [→ Übung]

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\,\phi = 0 \qquad \text{Klein-Gordon-Gl.!}$$

$$\pi(x) = \dot\phi(x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \dot\phi^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[ \dot\phi^2 + (\vec\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[ \pi^2 + (\vec\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right]$$