Einführung in die Quantenfeldtheorie

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
D. Nitt und M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2019
4. Übungsblatt 7. Juni 2019

Aufgabe 13:

Die Lagrange-Dichte des freien Dirac-Feldes ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi. \tag{13.1}$$

a) Leiten Sie die Dirac-Gleichung für ψ und $\overline{\psi}$ mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen her. Betrachten Sie dazu ψ und $\overline{\psi}$ als unabhängige Felder und leiten sie diese getrennt ab.

b) Nutzen Sie den allgemeinen Ausdruck des Energie-Impuls-Tensors

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\partial^\nu \psi + \partial^\nu \overline{\psi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{13.2}$$

und Aufgabenteil a) um zu zeigen, dass für das Dirac-Feld

$$T^{\mu\nu} = i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial^\nu \psi \tag{13.3}$$

gilt.

Aufgabe 14:

a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen des Dirac-Feldes invariant unter der Phasentransformation $\psi \to e^{-i\theta}\psi$ bleibt.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Noether-Theorems den erhaltenen Strom (siehe auch Aufgabe 9d)).

c) Weisen Sie nach, dass dieser Strom tatsächlich erhalten ist.

Aufgabe 15:

Zeigen Sie, dass ein Fermion, das der Dirac-Gleichung genügt, die Spin-Eigenwerte $\pm\frac{1}{2}$ besitzt. Hinweis: Der Drehimpulsoperator ist gegeben durch

$$\vec{J} = \int \mathrm{d}^3x\, \psi^\dagger \left(\vec{x} \times (-i\vec{\nabla}) + \frac{1}{2}\vec{S}\right)\psi. \tag{15.1}$$

Wählen Sie ein geeignetes Bezugssystem und nutzen Sie, dass $J_z a_0^{s\dagger}|0\rangle = [J_z, a_0^{s\dagger}]|0\rangle$.

Aufgabe 16:

Zeigen Sie, dass der Feynman-Propagator

$$S_F(x-y) \;=\; \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \;=\; \begin{cases} \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle & \text{falls } x^0 > y^0 \\ -\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle & \text{falls } y^0 > x^0 \end{cases} \tag{16.1}$$

in der Form

$$S_F(x-y) \;=\; i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{p\!\!\!/ + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\, e^{-ip\cdot(x-y)} \tag{16.2}$$

geschrieben werden kann und eine Green'sche Funktion zum Dirac-Operator ist, d.h. dass

$$(i\partial\!\!\!/_x - m)\, S_F(x-y) = i\delta^4(x-y) \tag{16.3}$$

gilt.