Einführung
in die Quantenfeldtheorie

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
D. Nitt und M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2019
3. Übungsblatt — 24. Mai 2019

Aufgabe 10:

a) Zeigen Sie unter Verwendung der Vertauschungsrelationen $\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = 2g^{\mu\nu}$ die folgenden Relationen für die γ-Matrizen:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4 \,, \tag{10.1}$$
$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu = -2\gamma^\alpha \,, \tag{10.2}$$
$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = 4g^{\alpha\beta} \,, \tag{10.3}$$
$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \,, \tag{10.4}$$
$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho) = 4(g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \,. \tag{10.5}$$

b) Weiterhin wird oft die hilfreiche Kombination von γ-Matrizen $\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ verwendet. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(\gamma_5)^2 = 1 \,, \tag{10.6}$$
$$\left\{\gamma_5, \gamma^\mu\right\} = 0 \,, \tag{10.7}$$
$$\mathrm{Tr}(\gamma_5) = 0 \,. \tag{10.8}$$

c) Beweisen Sie, dass die Spur über ein Produkt einer ungeraden Anzahl von γ-Matrizen verschwindet.

Aufgabe 11:

a) Das Produkt aus zwei Pauli Matrizen σ_a, σ_b kann kompakt geschrieben werden als

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i\epsilon_{abc}\sigma_c. \tag{11.1}$$

Zeigen Sie, dass

$$\sigma_a^2 = 1 \tag{11.2}$$
$$\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab} \tag{11.3}$$
$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^{2n} = p^{2n} \tag{11.4}$$

b) Beweisen Sie mithilfe von Teilaufgabe a) die in der Vorlesung eingeführte Relation:

$$\Phi_R(\vec{p}) = \exp\left(\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{\phi}\right)\Phi_R(0) \stackrel{!}{=} \frac{E + m + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m\,(E+m)}}\Phi_R(0). \tag{11.5}$$

Hinweise:

$$\cosh x = \cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2}, \qquad \sinh x = 2\cosh\frac{x}{2}\sinh\frac{x}{2},$$
$$1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x,$$
$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \qquad \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

c) Zeigen Sie außerdem:

$$\Phi_R(\vec{p}) = \frac{E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m}\Phi_L(\vec{p}). \tag{11.6}$$

Hausübungen

Aufgabe 12:

In der Vorlesung wurden die Generatoren für Rotationen

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & +\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & +\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

und Boosts

$$K^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12.2}$$

eingeführt. Es gilt

$$x \to x' = \Lambda x = \exp\Big(-\mathrm{i}(\vec{J} \cdot \vec{\theta} - \vec{K} \cdot \vec{\phi})\Big) x \tag{12.3}$$

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = \Phi(\Lambda^{-1} x) \tag{12.4}$$

a) Zeigen Sie, dass die infinitesimale Lorentz-Transformation eines Vektors durch

$$V^\alpha \to \left(\delta^\alpha{}_\beta - \frac{\mathrm{i}}{2} \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \right) V^\beta \tag{12.5}$$

mit

$$(J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = \mathrm{i}\Big(g^\mu{}_\alpha g^\nu{}_\beta - g^\mu{}_\beta g^\nu{}_\alpha \Big), \tag{12.6}$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \tag{12.7}$$

gegeben ist und bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen $J^{\mu\nu}$ und $\{\vec{J}, \vec{K}\}$ sowie den von $\omega_{\mu\nu}$ und $\{\vec{\theta}, \vec{\phi}\}$,

b) Verifizieren Sie die Identität

$$\hat{J}^{\mu\nu} = \mathrm{i}(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \tag{12.8}$$

exemplarisch über das Transformationsverhalten eines skalaren Feldes $\Phi(x)$ für

i) eine infinitesimale Drehung um die z-Achse,

ii) einen infinitesimalen Boost in x-Richtung.

c) Zeigen Sie mithilfe von Gl. (12.8) die Kommutatorrelation der Lorentz Algebra

$$\left[\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{J}^{\rho\sigma} \right] = \mathrm{i}\Big(g^{\nu\rho} \hat{J}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} \hat{J}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} \hat{J}^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} \hat{J}^{\nu\rho} \Big). \tag{12.9}$$

d) Zeigen Sie, unter Verwendung der Vertauschungsrelationen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu}$, dass die Kommutatoren

$$S^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{12.10}$$

eine Repräsentation der Lorentz Algebra bilden und als solche Gl. (12.9) erfüllen.