Einführung in die Quantenfeldtheorie

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
D. Nitt und M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2019
2. Übungsblatt 10. Mai 2019

Aufgabe 5:

Das skalare Feld ϕ und die dazugehörige konjugierte Impulsdichte π können mit Hilfe von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für die einzelnen Fourierkomponenten in der Form

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \left(a_\mathbf{p} + a^\dagger_{-\mathbf{p}}\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tag{5.1}$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_\mathbf{p}}{2}} \left(a_\mathbf{p} - a^\dagger_{-\mathbf{p}}\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tag{5.2}$$

dargestellt werden. Leiten Sie unter Verwendung der Kommutationsrelation für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren,

$$\left[a_\mathbf{p}, a^\dagger_{\mathbf{p}'}\right] = (2\pi)^3\ \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \qquad \left[a_\mathbf{p}, a_{\mathbf{p}'}\right] = \left[a^\dagger_\mathbf{p}, a^\dagger_{\mathbf{p}'}\right] = 0, \tag{5.3}$$

die Kommutationsrelation

$$\left[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')\right] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{5.4}$$

ab.

Aufgabe 6:

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist die Hamiltondichte für ein freies skalares Feld durch

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left[\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\right] \tag{6.1}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass sich die Hamiltonfunktion unter Verwendung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren als

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \omega_\mathbf{p} \left(a^\dagger_\mathbf{p} a_\mathbf{p} + \frac{1}{2}\left[a_\mathbf{p}, a^\dagger_\mathbf{p}\right]\right) \tag{6.2}$$

schreiben lässt.

Aufgabe 7:

Zeigen Sie, dass sich der Korrelator $D(x-y) \equiv \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ des freien skalaren Feldes $\phi(x) \equiv \phi(t,\mathbf{x})$ (Heisenberg-Bild!) in der Form

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(x-y)} \tag{7.1}$$

darstellen lässt.

Aufgabe 8:

Zeigen Sie, dass

$$\phi(t,\vec{x}) = e^{-i\vec{P}\cdot\vec{x}}\ \phi(t,0)\ e^{i\vec{P}\cdot\vec{x}} \tag{8.1}$$

gilt. Gehen Sie dazu analog zur in der Vorlesung diskutieren Zeitentwicklung im Heisenberg-Bild vor.

Hausübungen

Aufgabe 9:

Gegeben sei ein komplexes skalares Feld ϕ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \left|\partial^\mu \phi\right|^2 - m^2 \left|\phi\right|^2 \ . \tag{9.1}$$

a) Verwenden Sie zum einen ϕ und $\phi^\dagger$ und zum anderen $\phi_1 = \mathrm{Re}(\phi)$ und $\phi_2 = \mathrm{Im}(\phi)$ als unabhängige Variable und zeigen Sie, dass beide Wege zu den gleichen Bewegungsgleichungen führen.

b) Verwenden Sie ϕ und $\phi^\dagger$ sowie

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi^3)} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \left(a_\mathbf{p}\, e^{-ip\cdot x} + b_\mathbf{p}^\dagger\, e^{ip\cdot x}\right) \ , \tag{9.2}$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi^3)} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \left(b_\mathbf{p}\, e^{-ip\cdot x} + a_\mathbf{p}^\dagger\, e^{ip\cdot x}\right) \tag{9.3}$$

um die konjugierten Impulse π und $\pi^\dagger$ zu bestimmen.

c) Bestimmen Sie aus den Quantisierungsbedingungen für die Felder,

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = [\phi^\dagger(\mathbf{x}), \pi^\dagger(\mathbf{x}')] = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \ ,$$
$$[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}')] = [\phi^\dagger(\mathbf{x}), \phi^\dagger(\mathbf{x}')] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = [\pi^\dagger(\mathbf{x}), \pi^\dagger(\mathbf{x}')] = 0 \ ,$$
$$[\phi(\mathbf{x}), \phi^\dagger(\mathbf{x}')] = [\phi(\mathbf{x}), \pi^\dagger(\mathbf{x}')] = [\phi^\dagger(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = [\pi^\dagger(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = 0 \ ,$$

die Kommutatorrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

d) Zeigen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems, dass

$$j^\mu = i\left[(\partial^\mu \phi^\dagger)\phi - \phi^\dagger(\partial^\mu \phi)\right] \tag{9.4}$$

der erhaltene Noether-Strom für die Transformation $\phi \to \phi' = e^{i\alpha}\phi$ (und entsprechend $\phi^\dagger \to \phi^{\dagger\prime} = e^{-i\alpha}\phi^\dagger$) ist.

e) Zeigen Sie, dass für die zum Strom aus Gl. (9.4) gehörige erhaltene Ladung Q unter Vernachlässigung einer nicht messbaren unendlichen Konstanten

$$Q = \int d^3x\, j^0(x) \propto \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} - b_\mathbf{p}^\dagger b_\mathbf{p}\right) \tag{9.5}$$

gilt.

Zusatzaufgaben:

f) Zeigen Sie explizit mit Hilfe der Bewegungsgleichungen aus a), dass der Strom aus Gl. (9.4) erhalten ist.

g) Die Klein-Gordon-Gleichung wurde ursprünglich als relativistische Verallgemeinerung der Schrödinger-Gleichung, d.h. als quantenmechanische Einteilchengleichung aufgefasst. Wie in der Vorlesung angesprochen, stößt man dabei jedoch auf Widersprüche. Neben der Existenz von Lösungen negativer Energie gibt es vor allem Probleme mit der Wahrscheinlichkeitsinterpretation. Dies wollen wir in dieser Teilaufgabe genauer untersuchen.

Die Erhaltung des Noetherstroms bleibt natürlich unberührt, wenn wir ihn mit einem konstanten Faktor multiplizieren. Wählen Sie diesen so, dass die räumlichen Komponenten mit dem Wahrscheinlichkeitsstrom der Schrödinger-Theorie übereinstimmen, d.h.

$$\vec{j} = \frac{1}{2mi}\left(\phi^\dagger \vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^\dagger\right). \tag{9.6}$$

Zeigen Sie dann, dass $\rho = j^0$ für eine ebene Welle $\phi = \mathcal{N} e^{-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}$ mit $E^2 = \vec{p}^{\ 2} + m^2$ negativ sein kann und deshalb nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden kann. $\mathcal{N}$ ist dabei ein Normierungsfaktor.