Einführung in die Quantenfeldtheorie

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
D. Nitt und M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2019
1. Übungsblatt 26. April 2019

Aufgabe 1: Natürliche Einheiten

Zeigen Sie, dass die Gravitationskonstante $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$ in natürlichen Einheiten ($\hbar = c = 1$) durch $G = M_P^{-2}$ gegeben ist, wobei $M_P = 1.23 \cdot 10^{19}$ GeV die so genannte Planckmasse ist.

Hinweis: $1\,\mathrm{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$, $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\hbar c = 0.2\,\mathrm{GeV\ fm}$.

Aufgabe 2: Lorentz-Transformationen

Zeigen Sie für eine beliebige Lorentz-Transformation $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ folgende Identitäten:

a) $\Lambda_\mu{}^\alpha \, \Lambda^\mu{}_\beta = g^\alpha{}_\beta = g_\beta{}^\alpha$

b) $x^\nu = x'^\mu \, \Lambda_\mu{}^\nu$ und $x_\nu = x'_\mu \, \Lambda^\mu{}_\nu$ sowie $\Lambda^\alpha{}_\mu \, \Lambda_\beta{}^\mu = g^\alpha{}_\beta = g_\beta{}^\alpha$

c) Die Ableitung nach x^μ transformiert sich wie eine kovariante, die Ableitung nach x_μ wie eine kontravariante Größe, d.h.

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{bzw.} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

d) Die Tensoren 2. Stufe $g^{\mu\nu}$ und $\Lambda^{\mu\nu}$ sind Lorentz invariant, d.h.:

$$g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \qquad \text{und} \qquad \Lambda'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu\nu}\ .$$

Hinweis: Ein Tensor 2. Stufe transformiert sich unter Lorentz-Transformationen gemäß

$$A'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \, \Lambda^\nu{}_\beta \, A^{\alpha\beta}\ .$$

Aufgabe 3: Das skalare Feld und die Klein-Gordon-Gleichung

Betrachten Sie die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\Big[(\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi(x)) - m^2 \phi(x)^2\Big] \tag{3.1}$$

eines skalaren Felds $\phi(x)$.

a) Leiten Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} = 0 \tag{3.2}$$

die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\phi(x) = \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi(x) = 0 \tag{3.3}$$

her.

b) Zeigen Sie, dass sich die Lagrangedichte $\mathcal{L}(x)$ unter der Lorentz-Transformation $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ als Skalar transformiert:

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x). \tag{3.4}$$

Hinweis: Die Lorentz-Transformation des skalares Felds ist gegeben durch $\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$ wobei Λ^{-1} die zu Λ inverse Lorentz-Transformation ist.

Hausübungen

Aufgabe 4: Kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen

Die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes im Vakuum ist durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu \tag{4.1}$$

gegeben.

a) Verwenden Sie die Euler–Lagrange Gleichungen um die inhomogenen Maxwellgleichungen im Vakuum

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha} = J^\alpha \tag{4.2}$$

herzuleiten. Zeigen Sie anschließend, dass Gl. (4.2) zu den inhomogenen Maxwellgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}\,, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \tag{4.3}$$

äquivalent ist.

b) Zeigen Sie, dass der duale Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ die homogenen Maxwellgleichungen:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0 \tag{4.4}$$

erfüllt. Verwenden Sie Gl. (4.4) um die homogenen Maxwellgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0\,, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{4.5}$$

herzuleiten.

Hinweise:

$$\mu_0/(4\pi) = \hbar = c = 1, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (j^\mu) = (\rho, \vec{j})^{\mathrm{T}}, \quad F^{0i} = -E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k\ .$$