Spektraldarstellung des Propagators

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- gedresster Propagator im Impulsraum:

$$iD(p) = \int d^4x\, e^{ip\cdot x} \langle\Omega| T\phi(x)\phi(0) |\Omega\rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\, \rho(M^2)\, \frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon}$$

$$\mathrm{Im} \frac{1}{x+i\varepsilon} = -\pi\delta(x), \quad \rho(M^2) \text{ reell} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\rho(p^2) = -2\, \mathrm{Im} D(p)}$$

Spektraldarstellung des Propagators

- gedresster Propagator im Impulsraum:

$$iD(p) = \int d^4x\, e^{ip\cdot x} \langle\Omega| T\phi(x)\phi(0)|\Omega\rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\, \rho(M^2)\, \frac{i}{p^2-M^2+i\varepsilon}$$

$$\mathrm{Im}\frac{1}{x+i\varepsilon} = -\pi\delta(x), \quad \rho(M^2) \text{ reell} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho(p^2) = -2\,\mathrm{Im}D(p)}$$

- $D(p) = \frac{1}{p^2-m^2-\Sigma(p^2)+i\varepsilon}$
  - Masse renormiert: $\Sigma(m^2) = 0$
  - unrenormierte Felder: $\Sigma'(m^2) \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \rho(p^2) = Z 2\pi\delta(p^2-m^2) + \sum_i Z_i 2\pi\delta(p^2-m_i^2) + \rho_{\mathrm{cont}}(p^2)$$

  - Einteilchenzustand: $Z = (1-\Sigma'(m^2))^{-1}$
  - Bindungszustände: $Z_i = (1-\Sigma'(m_i^2))^{-1}, \quad m_i^2 = m^2 + \Sigma(m_i^2)$
  - Mehrteilchenkontinuum: $\rho_{\mathrm{cont}}(p^2) = \frac{-2\mathrm{Im}\Sigma(p^2)}{(p^2-m^2-\mathrm{Re}\Sigma(p^2))^2+(\mathrm{Im}\Sigma(p^2))^2}$

Spontane Symmetriebrechung in der klassischen Feldtheorie

- Lineares Sigma-Modell:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi}) + \frac{1}{2}\mu^2 \vec{\phi}^{\,2} - \frac{1}{4}\lambda \left(\vec{\phi}^{\,2}\right)^2, \qquad \vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}$$

  - Massenterm mit „falschem” Vorzeichen
  - smmetrisch unter N-dim. Rotationen $\vec{\phi} \to R\vec{\phi}, \quad R \in O(N)$

Spontane Symmetriebrechung in der klassischen Feldtheorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lineares Sigma-Modell:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi}) + \frac{1}{2}\mu^2 \vec{\phi}^{\,2} - \frac{1}{4}\lambda \left(\vec{\phi}^{\,2}\right)^2, \qquad \vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}$$

  - Massenterm mit „falschem” Vorzeichen
  - smmetrisch unter N-dim. Rotationen $\vec{\phi} \to R\vec{\phi}, \quad R \in O(N)$
- Grundzustand: $\vec{\phi} = const., \quad \vec{\phi}^{\,2} = \vec{\phi}_0^{\;2} = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2$
  - minimiert $V(\vec{\phi}^{\,2}) = -\frac{1}{2}\mu^2\vec{\phi}^{\,2} + \frac{1}{4}\left(\vec{\phi}^{\,2}\right)^2$,
  - Richtung von $\vec{\phi}$ beliebig

$\Rightarrow$ wähle willkürlich $\vec{\phi}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$

spontane Symmetriebrechung: Symmetrie(Grundzustand) $<$ Symmetrie($\mathscr{L}$)

Spontane Symmetriebrechung in der klassischen Feldtheorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- verschobene Felder: $\vec{\phi}(x) = \begin{pmatrix} \pi_1(x) \\ \vdots \\ \pi_{N-1}(x) \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\pi}) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma) \cdot (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2$$
$$-\mu\sqrt{\lambda}(\sigma^3 + \vec{\pi}^{\,2}\sigma) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^4 + 2\vec{\pi}^{\,2}\sigma^2 + (\vec{\pi}^{\,2})^2) \; + \; const.$$

  - $N - 1$ masselose Pionen $\hat{=}$ Verschiebungen entlang des Tals von V
  - σ-Teilchen mit Masse $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$ $\hat{=}$ Anregungen in radialer Richtung
  - 3- und 4-Punkt-Vertizes

Spontane Symmetriebrechung in der klassischen Feldtheorie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- verschobene Felder: $$\vec{\phi}(x) = \begin{pmatrix} \pi_1(x) \\ \vdots \\ \pi_{N-1}(x) \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix}$$

  $$\Rightarrow \mathscr{L} = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\pi}) + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \sigma) \cdot (\partial^\mu \sigma) - \tfrac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2$$
  $$-\mu\sqrt{\lambda}(\sigma^3 + \vec{\pi}^{\,2}\sigma) - \tfrac{\lambda}{4}(\sigma^4 + 2\vec{\pi}^{\,2}\sigma^2 + (\vec{\pi}^{\,2})^2) \; + \; const.$$

  - $N-1$ masselose Pionen $\hat{=}$ Verschiebungen entlang des Tals von V
  - σ-Teilchen mit Masse $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$ $\hat{=}$ Anregungen in radialer Richtung
  - 3- und 4-Punkt-Vertizes

- Goldstone-Theorem:

  Für jede spontan gebrochene kontinuierliche Symmetrie existiert ein masseloses Teilchen („Goldstone-Boson”)

Renormierung des Linearen Sigma-Modells

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lineares Sigma-Modell:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} Z(\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi}) + \frac{1}{2}\mu_0^2 Z \vec{\phi}^{\,2} - \frac{1}{4}\lambda_0 Z^2 \left(\vec{\phi}^{\,2}\right)^2$$

  - $\vec{\phi}$: renormierte Felder, $\vec{\phi}_{\text{unren}} = Z^{1/2}\vec{\phi}$ unrenormierte Felder
  - μ_0^2, λ_0: nackte Kopplungen

Renormierung des Linearen Sigma-Modells

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lineares Sigma-Modell:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}Z(\partial_\mu\vec{\phi})\cdot(\partial^\mu\vec{\phi}) + \frac{1}{2}\mu_0^2 Z\vec{\phi}^{\,2} - \frac{1}{4}\lambda_0 Z^2\left(\vec{\phi}^{\,2}\right)^2$$

  - $\vec{\phi}$: renormierte Felder, $\vec{\phi}_{\text{unren}} = Z^{1/2}\vec{\phi}$ unrenormierte Felder
  - μ_0^2, λ_0: nackte Kopplungen
- Def: $Z =: 1 + \delta_Z$, $-\mu_0^2 Z =: -\mu^2 + \delta\mu$, $\lambda_0 Z^2 =: \lambda + \delta_\lambda$

$$\Rightarrow \mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\phi})\cdot(\partial^\mu\vec{\phi}) + \frac{1}{2}\mu^2\vec{\phi}^{\,2} - \frac{1}{4}\lambda\left(\vec{\phi}^{\,2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\delta_Z(\partial_\mu\vec{\phi})\cdot(\partial^\mu\vec{\phi}) - \frac{1}{2}\delta_\mu\vec{\phi}^{\,2} - \frac{1}{4}\delta_\lambda\left(\vec{\phi}^{\,2}\right)^2$$

Renormierung des Linearen Sigma-Modells

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lineares Sigma-Modell:

  $$\mathscr{L} = \frac{1}{2} Z (\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi}) + \frac{1}{2} \mu_0^2 Z \vec{\phi}^{\,2} - \frac{1}{4} \lambda_0 Z^2 \left(\vec{\phi}^{\,2} \right)^2$$

  - $\vec{\phi}$: renormierte Felder, $\vec{\phi}_{\text{unren}} = Z^{1/2} \vec{\phi}$ unrenormierte Felder
  - μ_0^2, λ_0: nackte Kopplungen
- Def: $Z =: 1 + \delta_Z, \quad -\mu_0^2 Z =: -\mu^2 + \delta\mu, \quad \lambda_0 Z^2 =: \lambda + \delta_\lambda$

  $$\Rightarrow \mathscr{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi}) + \frac{1}{2} \mu^2 \vec{\phi}^{\,2} - \frac{1}{4} \lambda \left(\vec{\phi}^{\,2} \right)^2$$

  $$+ \frac{1}{2} \delta_Z (\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi}) - \frac{1}{2} \delta_\mu \vec{\phi}^{\,2} - \frac{1}{4} \delta_\lambda \left(\vec{\phi}^{\,2} \right)^2$$

- Divergenzstruktur:
  - $D = 4 - N$
  - 3 divergente Taylor-Koeffizienten
  - 3 Counterterme ✓