Funktionalableitungen und erzeugendes Funktional

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Funktionalableitung:

$$\frac{\delta f(y)}{\delta f(x)} = \delta^4(x-y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta}{\delta f(x)} \int d^4y\, f(y)g(y) = g(x)$$

  - analog zu $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j a_j x_j = a_i$

- erzeugendes Funktional:

$$Z[J] = \int D\phi \;\exp\left[i \int d^4x \left(\mathscr{L}[\phi] + J(x)\phi(x)\right)\right]$$

  - Quelle $J(x)$ = beliebige Funktion

- Korrelationsfunktionen:

$$\langle\Omega|T\{\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\}|\Omega\rangle = \frac{1}{Z[0]}\left[\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right)Z[J]\right]\Bigg|_{J=0}$$

Funktionalableitungen und erzeugendes Funktional

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- freies Klein-Gordon-Feld: $\mathscr{L}_0 = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^2\right]$

  $$\Rightarrow \quad \int d^4x\,[\mathscr{L}_0 + J\phi] = \int d^4x\,\Big[\tfrac{1}{2}\phi(-\underbrace{\partial_\mu\partial^\mu}_{\uparrow} - m^2 + \underbrace{i\varepsilon}_{\uparrow})\phi + J\phi\Big]$$

  partielle Int. — Konvergenz-erzeugender Faktor, $\Leftrightarrow$ ins Komplexe gedrehte Zeitintegration

- Klein-Gordon-Propagator: $(-\partial_\mu\partial^\mu - m^2 + i\varepsilon)D_F(x-y) = i\delta^4(x-y)$

  $\rightarrow$ verschobenes Feld: $\phi'(x) = \phi(x) - i\int d^4y\,D_F(x-y)\,J(y)$

$\Rightarrow$ erzeugendes Funktional:

$$Z[J] = Z[0]\,\exp\Big[-\tfrac{1}{2}\int d^4x\int d^4y\,J(x)D_F(x-y)J(y)\Big]$$

$\Rightarrow$ Zweipunkt-Funktion: $\langle\Omega|T\{\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\}|\Omega\rangle = D_F(x_1 - x_2) \quad \checkmark$

Funktionalableitungen und erzeugendes Funktional

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- ϕ^4-Theorie: $\quad Z[J] = \int D\phi \, \exp\left[i \int d^4x \, (\mathscr{L}_0 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi) \right]$
- Störungstheorie:

$$Z[J] = \int D\phi \left(1 - i\int d^4x \, \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \dots\right) \exp\left[i \int d^4x \, (\mathscr{L}_0 + J\phi) \right]$$

$$= \left(1 - \frac{i\lambda}{4!}\int d^4x \, (-i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4 + \dots\right) \underbrace{\int D\phi \, \exp\left[i \int d^4x \, (\mathscr{L}_0 + J\phi) \right]}_{Z_0[J] = \text{erz. Funktional der freien Theorie}}$$

$$= \left(1 - \frac{i\lambda}{4!}\int d^4x \, (-i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4 + \dots\right) Z_0[0] \, \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4x \int d^4y \, J(x) D_F(x-y) J(y) \right]$$