Pfadintegrale in der Quantenmechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Übergangsamplitude:

$$\langle t_f, \vec{x}_f | t_i, \vec{x}_i \rangle = \langle \vec{x}_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | \vec{x}_i \rangle$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) \int \left(\prod_{k=1}^{N-1} d^3 x_k \right) \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{N} \delta t \left[\vec{p}_k \cdot \frac{\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}}{\delta t} - H\left(\frac{\vec{x}_k + \vec{x}_{k-1}}{2}, \vec{p}_k\right) \right] \right\}$$

$$\equiv \int D\vec{p}\, D\vec{x} \exp\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - H(\vec{x}, \vec{p}) \right] \right\}$$

- analog:

$$\langle t_f, \vec{x}_f | T\{ \hat{x}_H^{\alpha_m}(t_m)\, \hat{x}_H^{\alpha_n}(t_n) \} | t_i, \vec{x}_i \rangle$$

$$= \langle \vec{x}_f | e^{-iH(t_i - t_0)}\, T\{ \hat{x}_H^{\alpha_m}(t_m)\, \hat{x}_H^{\alpha_n}(t_n) \}\, e^{iH(t_f - t_0)} | \vec{x}_i \rangle$$

$$= \int D\vec{p}\, D\vec{x}\; x^{\alpha_m}(t_m)\, x^{\alpha_n}(t_n) \exp\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - H(\vec{x}, \vec{p}) \right] \right\}$$

Pfadintegrale in der Quantenmechanik

- Herausprojizieren des Grundzustands:

$$\lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty} e^{-iH\tau}|\vec{x}_i\rangle = |\Omega\rangle\langle\Omega|\vec{x}_i\rangle \lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty} e^{-iE_0\tau}$$

- Grundzustandserwartungswert:

$$\langle\Omega|T\{\hat{x}_H^{\alpha_m}(t_m)\,\hat{x}_H^{\alpha_n}(t_n)\}|\Omega\rangle$$

$$= \lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty} \frac{\int D\vec{p}\,D\vec{x}\;x^{\alpha_m}(t_m)\,x^{\alpha_n}(t_n)\;\exp\left\{i\int_{-\tau}^{\tau} dt\,[\vec{p}\cdot\dot{\vec{x}}-H(\vec{x},\vec{p})]\right\}}{\int D\vec{p}\,D\vec{x}\;\exp\left\{i\int_{-\tau}^{\tau} dt\,[\vec{p}\cdot\dot{\vec{x}}-H(\vec{x},\vec{p})]\right\}}$$

$$= \lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty} \frac{\int D\vec{x}\;x^{\alpha_m}(t_m)\,x^{\alpha_n}(t_n)\;\exp\left\{i\int_{-\tau}^{\tau} dt\,L(\vec{x},\dot{\vec{x}})\right\}}{\int D\vec{p}\,D\vec{x}\;\exp\left\{i\int_{-\tau}^{\tau} dt\,L(\vec{x},\dot{\vec{x}})\right\}}$$

Funktionale Quantisierung von Skalarfeldern

- Übersetzungsregeln:
  - Koordinaten $\vec{x}(t) \quad \to \quad$ Felder $\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi_{\vec{x}}(t)$
  - Impulse $\vec{p}(t) \quad \to \quad$ kanonisch konjugierte Felder $\pi(t, \vec{x})$
  - Ortsraum-Zustände $|\vec{x}\rangle \quad \to \quad$ Feld-Zustände $|\phi(\vec{x})\rangle$

    $$\Rightarrow \quad \hat{\phi}_S(\vec{x})|\phi(\vec{x})\rangle = \phi(\vec{x})|\phi(\vec{x})\rangle$$

    - Vollständigkeit: $\mathbb{1} = \int \prod_{\vec{x}} d\phi(\vec{x})\, |\phi(\vec{x})\rangle\langle\phi(\vec{x})|$
    - Orthonormiertheit: $\langle\phi_a(\vec{x})|\phi_b(\vec{x})\rangle = \prod_{\vec{x}} \delta(\phi_a(\vec{x}) - \phi_b(\vec{x}) \equiv \delta[\phi_a - \phi_b]$
  - Impuls-Zustände $|\pi(\vec{x})\rangle$ analog

Funktionale Quantisierung von Skalarfeldern

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Übersetzungsregeln:
  - Koordinaten $\vec{x}(t)$ $\quad\rightarrow\quad$ Felder $\phi(t,\vec{x}) \equiv \phi_{\vec{x}}(t)$
  - Impulse $\vec{p}(t)$ $\quad\rightarrow\quad$ kanonisch konjugierte Felder $\pi(t,\vec{x})$
  - Ortsraum-Zustände $|\vec{x}\rangle$ $\quad\rightarrow\quad$ Feld-Zustände $|\phi(\vec{x})\rangle$

    $\Rightarrow \quad \hat{\phi}_S(\vec{x})|\phi(\vec{x})\rangle = \phi(\vec{x})|\phi(\vec{x})\rangle$
    - Vollständigkeit: $\mathbb{1} = \int \prod_{\vec{x}} d\phi(\vec{x})\, |\phi(\vec{x})\rangle\langle\phi(\vec{x})|$
    - Orthonormiertheit: $\langle\phi_a(\vec{x})|\phi_b(\vec{x})\rangle = \prod_{\vec{x}} \delta(\phi_a(\vec{x}) - \phi_b(\vec{x}) \equiv \delta[\phi_a - \phi_b]$
  - Impuls-Zustände $|\pi(\vec{x})\rangle$ analog
- typische Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - V(\phi)$

  $\Rightarrow \quad H[\phi,\pi] = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + V(\phi)\right)$

  quadratisch in π $\quad\Rightarrow\quad$ $\int D\pi$-Integral kann ausgeführt werden.

Funktionale Quantisierung von Skalarfeldern

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Übergangsamplitude:

$$\langle \phi_f(\vec{x}) | e^{-iH(t_f - t_i)} | \phi_i(\vec{x}) \rangle = \mathcal{N} \int D\phi \, \exp\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \, \mathscr{L}[\phi(x)] \right\}$$

- Korrelationsfunktionen:

$$\langle \Omega | T\{\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\} | \Omega \rangle = \lim_{\tau \to (1 - i\varepsilon)\infty} \frac{\int D\phi \; \phi(x_1)\phi(x_2) \, \exp\left\{ i \int_{-\tau}^{\tau} dt \int d^3x \, \mathscr{L}[\phi(x)] \right\}}{\int D\phi \, \exp\left\{ i \int_{-\tau}^{\tau} dt \int d^3x \, \mathscr{L}[\phi(x)] \right\}}$$