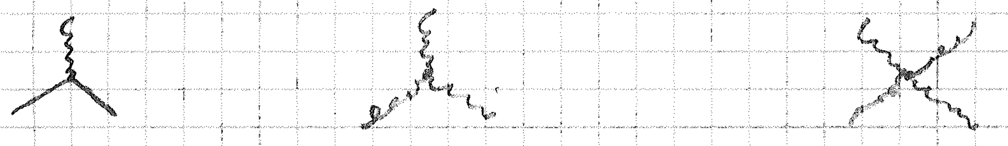
XII.5 Quantisierung der QCD

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\psi}_f \,(i\not{D} - m_f)\,\psi_f - \frac{1}{4}\,(G^a_{\mu\nu})^2$$

mit
$$D_\mu = \partial_\mu - ig\, A^a_\mu(x)\, T^a$$

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\, f^{abc} A^a_\mu A^c_\nu$$

Im Abschnitt XII.3 haben wir bereits die Quark-Gluon-, 3-Gluon- und 4-Gluon-Vertizes



angegeben, die man mit den üblichen Methoden (kanonische Quantisierung oder Pfadintegralformalismus) herleiten kann.
Dies gilt auch für den Quark-Propagator

$$\langle \psi_{fc\alpha}(x)\, \bar{\psi}_{f'c'\beta}(y) \rangle$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-y)} \left(\frac{i}{\not{p} - m_f + i\varepsilon} \right)_{\alpha\beta} \delta_{ff'}\, \delta_{cc'}$$

Dirac- Flavour- Farb-Indizes

Dagegen ist die Herleitung des Gluon-Propagators wie in der QED schwieriger, da der „freie Anteil" des $(G^a_{\mu\nu})^2$-Terms, $(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)^2$, wieder Nullmoden enthält und daher nicht invertierbar ist (vgl. Kap. VIII.5)

→ <u>Faddeev - Popov - Methode</u>

Wie in Kap. VIII.5 schreiben wir in das Pfadintegral

$$Z_A \equiv \int \mathcal{D}A \, \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} (G^a_{\mu\nu})^2 \right) \right] \equiv \int \mathcal{D}A \, e^{iS[A]}$$

eine Eins der Form

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \; \delta(F(A^{(\alpha)})) \det\left(\frac{\delta F(A^{(\alpha)})}{\delta\alpha} \right)$$

ein, um eine kovariante Eichfixierungsbedingung

$$F^a(A) = 0 \quad , \quad F^a: \text{ skalare Funktionen},$$

zu implementieren. Dabei bezeichnet $A^{(\alpha)}$ das eichtransformierte Gluon-Feld:

$$(A^{(\alpha)})^a_\mu(x) T^a = e^{i\alpha^a(x)T^a} \left[A^b_\mu(x) T^b + \frac{i}{g} \partial_\mu \right] e^{-i\alpha^c(x)T^c}$$

bzw. infinitesimal

$$(A^{(\alpha)})^a_\mu(x) = A^a_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a(x) + f^{abc} A^b_\mu(x) \alpha^c(x)$$

$$\equiv A^a_\mu(x) + \frac{1}{g} D^{ac}_\mu \alpha^c(x)$$

mit $D^{ac}_\mu = \partial_\mu \delta^{ac} + g f^{abc} A^b_\mu$ = kov. Abl. für die adj. Darst. (s. S. XII - 22)

2) Eichtransformation = konstante Verschiebung von A und Rotation im Farbraum

$\Rightarrow \mathcal{D}A = \prod_x \prod_{a,\mu} dA^a_\mu(x)$ ist invariant:

$$\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^{(\alpha)}$$

Eichinvarianz der Wirkung:

$$S[A] = S[A^{(\alpha)}]$$

$$\Rightarrow Z_A = \int \mathcal{D}A \; e^{iS[A]}$$
$$= \int \mathcal{D}A \; e^{iS[A]} \int \mathcal{D}\alpha \; \delta(F(A^{(\alpha)})) \det\left(\frac{\delta F(A^{(\alpha)})}{\delta \alpha}\right)$$
$$= \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A^{(\alpha)} \; e^{iS[A^{(\alpha)}]} \delta(F(A^{(\alpha)})) \det\left(\frac{\delta F(A^{(\alpha)})}{\delta \alpha}\right)$$

Für die Eichfixierungsfunktion wählen wir wieder

$$F^a(A) = \partial^\mu A^a_\mu(x) - \omega^a(x)$$

und integrieren über $\mathcal{D}\omega$ mit Gauß-artigem Gewicht $\exp\left[-i\int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}\right]$

$$\Rightarrow \mathcal{N} \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A^{(\alpha)} \exp\left(iS[A^{(\alpha)}] - i\int d^4x \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu(x))^2\right)$$
$$\cdot \det\left(\frac{\delta F(A^{(\alpha)})}{\delta \alpha}\right)$$

Faddeev-Popov-Determinante

In der QED war die Faddeev-Popov-Det. A- und α-unabhängig und konnte als weitere Konstante aus dem Integral herausgezogen werden. Hier funktioniert das nicht mehr. Zunächst einmal gilt

$$(A^{(\alpha+\delta\alpha)})^a_\mu = (A^{(\alpha)})^a_\mu + \frac{1}{g} D^{ac}_\mu(A^{(\alpha)}) \, \delta\alpha^c)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(\delta A^{(\alpha)})^a_\mu}{\delta \alpha^b} = \frac{1}{g} \mathcal{D}^{ac}_\mu (A^{(\alpha)})\, \delta^{cb} = \frac{1}{g} \mathcal{D}^{ab}_\mu (A^{(\alpha)})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta F^a(A^{(\alpha)})}{\delta \alpha^b} = \frac{\delta F^a}{\delta A^c_\mu} \frac{(\delta A^{(\alpha)})^c_\mu}{\delta \alpha^b}$$

$$= \delta^{ac} \partial^\mu \frac{1}{g} \mathcal{D}^{cb}_\mu (A^{(\alpha)})$$

$$= \frac{1}{g} \partial^\mu \mathcal{D}^{ab}_\mu (A^{(\alpha)}) \equiv \frac{1}{g} M^{ab}_{FP} (A^{(\alpha)})$$

mit dem <u>Faddeev-Popov-Operator</u>

$$M^{ab}(A) := \partial^\mu \mathcal{D}^{ab}_\mu (A) = \partial^\mu \partial_\mu \delta^{ab} + g f^{acb} \partial^\mu A^c_\mu$$

Wir können jetzt die Integrationsvariable $A^{(\alpha)}$ in A umbenennen und erhalten

$$Z_A = \underbrace{\mathcal{N} \int \mathcal{D}\alpha}_{\mathcal{N}'} \underbrace{\int \mathcal{D}A \, \exp\left(i S[A] - i \int d^4x \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A^a_\mu(x))^2\right) \cdot \det\left(\frac{1}{g} M_{FP}(A)\right)}_{\alpha\text{-unabhängig}}$$

Da M_{FP} über $\mathcal{D}_\mu$ von A abhängt, kann die Determinante nicht aus dem Pfadintegral herausgezogen werden. Statt dessen erinnern wir uns, dass Funktionaldeterminanten mit Hilfe von komplexen Graßmann-Feldern dargestellt werden können.

Wir hatten (s. VIII - 30):

$$\det B = \left(\prod_i \int d\theta_i^* \, d\theta_i\right) e^{-\theta^{*T} B \theta}$$

für N dim komplexe Graßmann-Zahlen θ und hermitesche $N \times N$-Matrizen B.

Entsprechend kann man schreiben:

$$\det\left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\right) = \underset{\uparrow \text{ konstante Faktor}}{(-i)^N} \det\left(i\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\right)$$

$$\sim \int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\, \exp\left[i \int d^4x\, \bar{c}\,(-\partial^\mu D_\mu)\,c\right]$$

mit Graßmann-Feldern c und $\bar{c}$.

Der Faktor $\frac{i}{g}$ wurde in der Normierung der Felder absorbiert.

Die Felder

- sind Lorentz-Skalare = Spin 0
- antikommutieren

$\Rightarrow$ verletzen die Spin-Statistik-Relation

$\rightarrow$ unphysikalische Teilchen

„<u>Faddeev-Popov-Geister</u>"

- Wie A_μ und D_μ gehören sie zur adjungierten Darstellung der Farb-SU(3)

$\rightarrow$ 8 Farb-Indizes.

Insgesamt ergibt sich also für den gluonischen Anteil:

$$Z_A \sim \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\; e^{i\int d^4x\,(\mathcal{L}_{glue}+\mathcal{L}_{gf}+\mathcal{L}_{ghost})}$$

mit

$$\mathcal{L}_{glue} = -\frac{1}{4}\left(G^a_{\mu\nu}\right)^2$$

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^{\mu a}\right)^2 \qquad \text{(Eichfixierungsterm)}$$

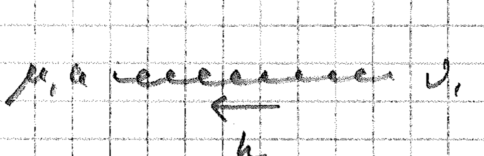
und dem Geist-Anteil

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ghost} &= \bar{c}\,(-\partial^\mu \mathcal{D}_\mu)\,c \\ &= -\bar{c}^a\,(\partial^\mu \mathcal{D}^{ab}_\mu)\,c^b \\ &= -\bar{c}^a\,(\partial^\mu\partial_\mu\,\delta^{ab} + g\,f^{acb}\,\partial^\mu A^c_\mu)\,c^b\end{aligned}$$

Aus $\mathcal{L}_{glue} + \mathcal{L}_{gf}$ ergibt sich analog zum Photon-Propagator der <u>Gluon-Propagator</u>

$$\langle A^a_\mu(x)\,A^b_\nu(y)\rangle = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{-ik\cdot(x-y)}\; i\,\mathcal{D}^{ab\,(\xi)}_{\mu\nu}(k)$$

mit $$i\,\mathcal{D}^{ab\,(\xi)}_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2+i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\delta^{ab}$$

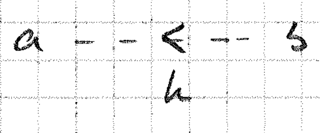


und Eichparameter ξ.

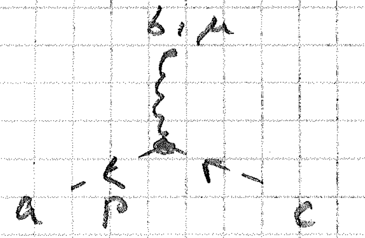
Aus dem Geist-Anteil bekommt man

<u>Geist-Propagator:</u>

$$\langle c^a(x)\,\bar{c}^b(x')\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik\cdot(x-y)}\, \frac{i}{k^2}\, \delta^{ab}$$



und den <u>Geist-Gluon-Vertex:</u>



$$= g f^{abc} p^\mu$$

↑ auslaufender Impuls

<u>Bemerkung</u>

Die Formel für die funktionale Eins gilt streng genommen nur, wenn die Eichfixierung eindeutig ist, d.h. wenn die Gleichung

$$F(A^{(\alpha)}) = 0$$

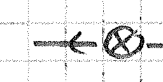
nur für ein α erfüllt ist. In nicht-abelschen Eichtheorien ist das leider nicht erfüllt. Z.B. hat $\partial_\mu A^\mu = 0$ mehrere eichäquivalente Lösungen („Gribov-Kopien").
Außerdem muss man eigentlich über den Betrag der Faddeev-Popov-Determinante integrieren.

Beides hat keine Auswirkungen auf die Störungstheorie, kann aber in nicht-perturbativen Rechnungen eine Rolle spielen.

XII.6 Loop-Korrekturen und laufende Kopplung der QCD (→ Übung)

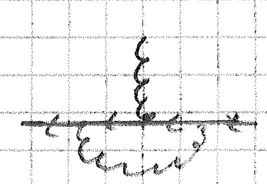
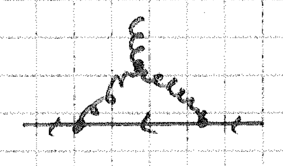
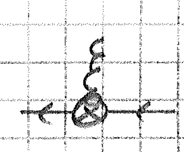
Analog zur QED betrachten wir Korrekturen der Ordnung g^2 zu den nackten Propagatoren von Quark und Gluon und zum Quark-Gluon-Vertex

i) Quark-Selbstenergie:

 ⇝ Counterterm  $= i\not p\,\delta_2$

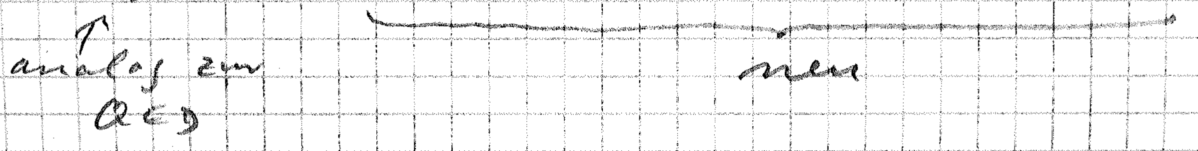
(+ Massenrenkonst.)

ii) Quark-Gluon-Vertex:

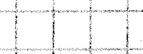
 +  ⇝  $= ig\,T^a\gamma^\mu\delta_1$

↑ analog zur QED ↑ neu

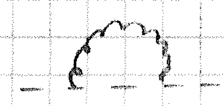
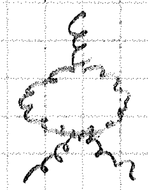
iii) Gluon-Polarisation:



analog zur QED neu

⇝ Counterterm:  $\sim \delta^{ab}\,\delta_3$

(Daneben gibt es natürlich auch Korrekturen zum Geist-Propagator, den 3- und 4- Gluon- Vertizes sowie dem Geist- Gluon- Vertex, z. B.

 oder  .)

Für die β-Funktion gilt

$$\beta(g) = M \frac{\partial g}{\partial M} = g M \frac{\partial}{\partial M}\left(-\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3\right)$$

In der QED gilt $\delta_1 = \delta_2$, aber das ist in der QCD nicht mehr der Fall.

Man findet

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2}\left(11 - \frac{2}{3} N_f\right) < 0 \text{ für } N_f < 16.5$$

Die QCD ist asymptotisch frei
(für $N_f \leq 16$) !