Für infinitesimale Transformationen ergibt sich

$$G^k_{\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} \longrightarrow G^k_{\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} + i\alpha^j \left[\frac{\sigma^j}{2}, G^k_{\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} \right]$$

$$= G^k_{\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} - \varepsilon^{ijk} \alpha^i G^j_{\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2}$$

$\Rightarrow$ $G^k_{\mu\nu}$ oder $G^k_{\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2}$ sind nicht eichinvariant!

Eine eichinvariante Kombination ist dagegen

$$\mathrm{tr}\left[\left(G^k_{\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{4} G^k_{\mu\nu} G^{\ell\mu\nu} \underbrace{\mathrm{tr}\left[\sigma^k \sigma^\ell \right]}_{= 2\delta^{k\ell}} = \frac{1}{2} \left(G^k_{\mu\nu} \right)^2$$

denn

$$\left(G^k_{\mu\nu} \right)^2 \longrightarrow \left(G^k_{\mu\nu} - \varepsilon^{ijk} \alpha^i G^j_{\mu\nu} \right) \left(G^{k\mu\nu} - \varepsilon^{mnk} \alpha^m G^{n\mu\nu} \right)$$

$$= \left(G^k_{\mu\nu} \right)^2 - 2\varepsilon^{ijk} \alpha^i G^j_{\mu\nu} G^{k\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

antisymm. symm in $j \leftrightarrow k$

$$= \left(G^k_{\mu\nu} \right)^2$$

$\hookrightarrow$ eichinvariante Lagrangedichte:

$$\boxed{\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(i\not{D} - m \right) \psi - \frac{1}{4} \left(G^k_{\mu\nu} \right)^2}$$

Zusätzlich sind auch hier wieder Terme $\sim \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} G^k_{\alpha\beta} G^k_{\mu\nu}$ möglich, die im Gegensatz zur QED auch zur Wirkung beitragen.

XII . 3 SU(3) und die QCD-Lagrangedichte

Die Überlegungen aus Abschnitt XII . 2 lassen sich leicht auf andere kontinuierliche Gruppen übertragen.

- Lie-Gruppen:
  Gruppen, deren Elemente durch kontinuierliche Parameter gekennzeichnet werden können und deren Verknüpfungsoperationen analytische Funktionen des Parameterraums auf sich selbst sind:

$$G = \{ g(\vec{\theta}) \} , \quad \vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n),$$
$$\theta_i \ \text{kontinuierlich}$$

$$g(\vec{\theta}) \cdot g(\vec{\phi}) = g(\vec{\xi}), \quad \vec{\xi} = f(\vec{\theta}, \vec{\phi})$$

Verknüpfungsoperation der Gruppe — analyt. Fkt.

kompakte Lie-Gruppen:
Parameterraum ist beschränkt und abgeschlossen (= enthält die Ränder)

↳ Alle Elemente können durch eine Folge unendl. vieler infinitesimaler Transformationen aus der Identität erzeugt werden.

⇒ Die Gruppeneigenschaften sind durch die Eigenschaften der infinitesimalen Transformationen bestimmt infinitesimale Transformation:

$$g(\vec{\theta}) = 1 + i\,\theta^a T^a + \mathcal{O}(\theta^2)$$

T^a, $a = 1, \ldots, n$ Generatoren der Gruppe

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad f^{abc}: \text{„Struktur-konstanten"}$$

„Lie Algebra"

endliche Transformationen:

$$g(\vec{\theta}) = \exp[i\,\theta^a T^a]$$

- $SU(N)$ = Gruppe der unitären $N \times N$-Matrizen mit Determinante 1

$$V(\vec{\theta}) = \exp[i\,\theta^a T^a]$$

unitär: $V^\dagger V = \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ T^a hermitesch: $T^{a\dagger} = T^a$

$\det V = 1$ $\Rightarrow$ $\operatorname{tr} T^a = 0$

$N \times N$-Matrizen $\Rightarrow$ $N^2 - 1$ lin. unabh. Matr. mit $T^{a\dagger} = T^a$ und $\operatorname{tr} T^a = 0$

$\Rightarrow$ $N^2 - 1$ Generatoren.

- **SU(2)**

$N = 2 \Rightarrow N^2 - 1 = 3$ Generatoren

z. B. $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$, σ^a = Pauli-Matrizen

z.B. $[T^a, T^b] = i\varepsilon^{abc} T^c \Rightarrow f^{abc} = \varepsilon^{abc}$

- **SU(3)**

$N = 3 \Rightarrow N^2 - 1 = 8$ Generatoren

übliche Wahl:

$T^a = \frac{\lambda^a}{2}$, λ^a = Gell-Mann-Matrizen

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Normierung: $\mathrm{tr}\,[\lambda^{a\,2}] = 2 \Rightarrow \mathrm{tr}\,[T^{a\,2}] = \frac{1}{2}$

Strukturkonstanten: $\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2}$

f^{abc} total antisymmetrisch

Jacobi-Idi: $[T^a, [T^b, T^c]]$ + zykl. $= 0$

$\Rightarrow f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0$

Genau genommen erzeugen die Gell-Mann-Matrizen die Fundamentaldarstellung der SU(3). Es gibt aber auch andere, insbesondere auch anders-dimensionale Darstellungen der Gruppe. Voraussetzung ist nur, dass die Generatoren die Lie-Algebra mit den selben Strukturkonstanten erfüllen.

- adjungierte Darstellung:

Definiere $(T^a)^{bc} = -i f^{abc}$

Dann kann man mit Hilfe der Jacobi-Id. zeigen:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

($\hat{=}$ 8-dim. Darst. der SU(3))

- konjugierte Darstellung

$$\overline{T}^a = -T^{a*}$$

$$\Rightarrow [\overline{T}^a, \overline{T}^b] = [T^a, T^b]^* = -i f^{abc} T^{c*} = i f^{abc} \overline{T}^c$$

In der QCD beschreibt die Fundamentaldarstellung die Transformation der Quarks, die konjugierte Darstellung die Transformation der Antiquarks und die adjungierte Darstellung die Transformation der Gluonen.

QCD - Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\psi}_f (i \not{D} - m_f) \psi_f - \frac{1}{4} (G^a_{\mu\nu})^2$$

- ψ_f : Quark-Feld mit Flavour $f \in \{u, d, s, c, b, t\}$

Jedes dieser Felder ist ein Triplett von Dirac-Spinoren

$$\psi_f = \begin{pmatrix} \psi_{f,r} \\ \psi_{f,g} \\ \psi_{f,b} \end{pmatrix}$$ mit dem „Farb"-Freiheitsgraden „rot" (r), „grün" (g) und „blau" (b).

- Forderung:
Invarianz unter lokaler Farb-SU(3)

$$\psi_f(x) \to V(x)\psi_f(x) \equiv \exp(i\theta^a(x) T^a)\psi_f(x),$$

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2}$$

↳ kovariante Ableitung:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A^a_\mu(x) T^a$$

mit dem Gluon-Feld $A^a_\mu(x)$, $a = 1, \dots, 8$

und der Kopplungskonstanten g.

Transformationsverhalten:

$$A_\mu^a(x)\, T^a \to V(x) \left(A_\mu^a(x)\, T^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^\dagger(x)$$

infinitesimal:

$$A_\mu^a(x) \to A_\mu^a(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \Theta^a(x) + f^{abc} A_\mu^b\, \Theta^c$$

- <u>Feldstärketensor:</u>

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig\, G_{\mu\nu}^a\, T^a$$

$$\hookrightarrow G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

infinitesimale Transformation:

$$G_{\mu\nu}^a \to G_{\mu\nu}^a - f^{abc}\, \Theta^b\, G_{\mu\nu}^c$$

<u>Diskussion:</u>

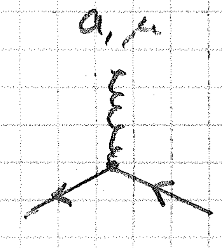
$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{WW}$$

$$\mathcal{L}_0 = \sum_f \bar{\psi}_f (i\not{\partial} - m_f) \psi_f - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WW} = &\sum_f g\, \bar{\psi}_f \gamma^\mu T^a \psi_f\, A_\mu^a \\ &- g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{b\mu} A^{c\nu} \\ &- \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu}\end{aligned}$$

⇒ Vertizes in der quantisierten Theorie:

Quark-Gluon-Vertex



$$= i g \gamma^\mu T^a$$

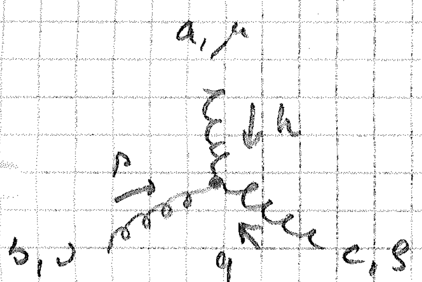
kann die Farbe des Quarks ändern!

Bsp.: $a = 1 \Rightarrow T^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

einlaufendes rotes Quark:

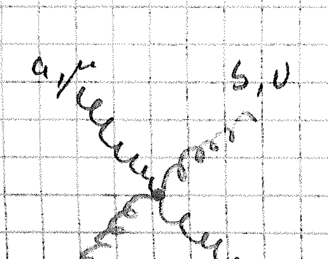
$$|r\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^1 |r\rangle \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |g\rangle$$

3-Gluon-Vertex



$$= g f^{abc} \left[g^{\mu\nu} (k-p)^\rho + g^{\nu\rho} (p-q)^\mu + g^{\rho\mu} (q-k)^\nu \right]$$

4-Gluon-Vertex



$$= -i g^2 \left[f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \right]$$