XII Eichtheorien

XII.1 Eichinvarianz der QED

Im Kap. V haben wir gesehen, dass die Lagrangedichte der QED invariant unter lokalen Eichtransformationen ist. Wir wollen jetzt den Spieß umdrehen, indem wir die lokale Symmetrie postulieren und daraus die QED-Lagrangedichte herleiten. Dieses Verfahren wollen wir dann in den nächsten Abschnitten auf andere Symmetriegruppen verallgemeinern.

Konkret starten wir mit einem Dirac-Feld $\psi(x)$ und fordern, dass die Theorie invariant ist unter lokalen Phasentransformationen

$$\boxed{\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x)}$$

Entsprechend gilt

$$\bar\psi(x) = \psi^+(x)\gamma^0 \rightarrow \bar\psi(x)\, e^{-i\alpha(x)} .$$

$$\Rightarrow \quad \bar\psi(x)\psi(x) \rightarrow \bar\psi(x)\psi(x)$$

$\rightsquigarrow$ Der Dirac-Massenterm $m\bar\psi\psi$ ist eichinvariant.

Dagegen macht der Ableitungsterm zunächst Probleme.

Betrachten wir die Richtungsableitung

$$n^\mu \partial_\mu \psi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\psi(x+\varepsilon n) - \psi(x)\right]$$

$$\longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[e^{i\alpha(x+\varepsilon n)}\psi(x+\varepsilon n) - e^{i\alpha(x)}\psi(x)\right]$$

$$= e^{i\alpha(x)} n^\mu \left[\partial_\mu + i(\partial_\mu \alpha(x))\right]\psi(x)$$

Die Ableitung transformiert sich also anders als das Feld selbst, so dass $\bar\psi i \partial\!\!\!/ \psi$ nicht eichinvariant ist. Statt dessen benötigen wir eine <u>kovariante Ableitung</u> D_μ mit der Eigenschaft

$$\boxed{D_\mu \psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x)}$$

Dazu schreiben wir die Richtungsableitung in der Form

$$n^\mu D_\mu \psi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\psi(x+\varepsilon n) - U(x+\varepsilon n, x)\psi(x)\right]$$

mit einem Faktor $U(y,x)$, der die unterschiedlichen Phasen an den Orten y und x ausgleicht:

$$U(y,x) \longrightarrow e^{i\alpha(y)} U(y,x)\, e^{-i\alpha(x)}$$

$$\Rightarrow n^\mu D_\mu \psi(x) \longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} e^{i\alpha(x+\varepsilon n)} \left[\psi(x+\varepsilon n) - U(x+\varepsilon n, x)\psi(x)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} e^{i\alpha(x)}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))\left(\varepsilon n^\mu D_\mu \psi(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)$$

$$= e^{i\alpha(x)} n^\mu D_\mu \psi(x) \qquad \checkmark$$

Wenn wir am gleichen Ort bleiben, ist keine Phasenänderung erforderlich:

$$U(x,x) = 1 .$$

(Das gilt nicht, wenn wir auf einem endlichen geschlossenen Weg an den Ausgangspunkt zurückkehren.)

Taylor-Entwicklung für kleine Raumzeit-Distanzen:

$$U(x+\varepsilon n, x) = 1 + \varepsilon n^\mu \left.\frac{\partial U(y,x)}{\partial y^\mu}\right|_{y=x} + O(\varepsilon^2)$$

$$\equiv 1 - ie\varepsilon n^\mu A_\mu(x) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad e A_\mu(x) = i \left.\frac{\partial U(y,x)}{\partial y^\mu}\right|_{y=x}$$

$$\Rightarrow \quad n^\mu D_\mu \psi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\psi(x+\varepsilon n) - (1 - ie\varepsilon n^\mu A_\mu(x))\psi(x)\right]$$

$$= n^\mu \left[\partial_\mu + ie A_\mu(x)\right]\psi(x)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu(x)}$$

Transformationsverhalten:

$$U(x+\varepsilon n, x) \longrightarrow e^{i\alpha(x+\varepsilon n)}\, U(x+\varepsilon n, x)\, e^{-i\alpha(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - ie\varepsilon n^\mu A_\mu + O(\varepsilon^2)$$

$$\rightarrow e^{i\alpha(x)}\left[1 + i\varepsilon n^\mu(\partial_\mu\alpha) + O(\varepsilon^2)\right]\left[1 - ie\varepsilon n^\mu A_\mu + O(\varepsilon^2)\right] e^{-i\alpha(x)}$$

$$= 1 - ie\varepsilon n^\mu\left[A_\mu - \frac{1}{e}(\partial_\mu\alpha)\right] + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\,\partial_\mu \alpha(x)}$$

Wir benötigen noch den kinetischen Term für das Eichfeld. Dazu wenden wir die kovariante Ableitung zweimal hintereinander auf ψ an:

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\,\psi(x)$$

$$D_\mu \psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\,D_\mu \psi(x)$$

$$\Rightarrow \quad D_\mu D_\nu \psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\,D_\mu D_\nu \psi(x)$$

Dann gilt aber auch

$$[D_\mu, D_\nu]\,\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\,[D_\mu, D_\nu]\,\psi(x) \qquad (*)$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu]\,\psi &= [\partial_\mu + ieA_\mu, \partial_\nu + ieA_\nu]\,\psi \\
&= (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu)\,\psi \\
&\quad + ie\,(\partial_\mu A_\nu - A_\nu \partial_\mu + A_\mu \partial_\nu - \partial_\nu A_\mu)\,\psi \\
&\quad - e^2\,(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)\,\psi \\
&= ie\,[(\partial_\mu A_\nu) - (\partial_\nu A_\mu)]\,\psi \\
&= ie\,F_{\mu\nu}\,\psi
\end{aligned}$$

mit dem Feldstärketensor $\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$

Da $F_{\mu\nu}$ einfach ein multiplikativer Faktor ist und keine Ableitungen enthält, die auf ψ wirken, kommt der Faktor $e^{i\lambda(x)}$ in (*) einfach aus der Transformation von ψ. Folglich ist der Kommutator eichinvariant:

$$[D_\mu, D_\nu] \to [D_\mu, D_\nu] \Leftrightarrow F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu},$$

(was man natürlich auch explizit nachrechnen kann).

Wir haben damit folgende eichinvariante „Bausteine" gefunden, aus denen wir eine Lagrangedichte bilden können:

$$\bar\psi\psi\ , \quad \bar\psi D_\mu^{\mu}\psi\ , \quad F_{\mu\nu}$$

Berücksichtigen wir, dass $\mathcal{L}$ ein Lorentz-Skalar ist und beschränken wir uns auf renormierbare Terme, kann $\mathcal{L}$ die folgende Gestalt annehmen:

$$\mathcal{L} = \bar\psi(i\not{D} - m)\psi - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - ic\,\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}$$

$$= \mathcal{L}_{QED} - ic\,\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}$$

Den Faktor vor dem $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$-Term können wir wie gewohnt auf $\frac{1}{4}$ setzen, da wir A_μ beliebig skalieren können. (Das Vorzeichen ergibt sich aus der Forderung, dass das Spektrum nach unten beschränkt ist.)

Die Kopplung an die Quarks kann dann unabhängig durch die Kopplungskonstante e festgelegt werden.

Der zusätzliche Term ist ~ $\vec{E}\cdot\vec{B}$ und bricht P und T-Symmetrie. Man kann ihn jedoch als Viererdivergenz schreiben

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \sim \partial^\alpha K_\alpha \,, \quad K_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} A^\beta F^{\mu\nu} ,$$

so dass es nur einen Oberflächenbeitrag zur Wirkung liefert und nicht beiträgt, wenn $F^{\mu\nu}$ im Unendlichen verschwindet.

Damit ist die QED-Lagrangedichte eindeutig durch die geforderte Symmetrie festgelegt.

XII.2 Yang-Mills-Theorie

Analog zum Vorgehen in Abschnitt XII.1 lassen sich auch Lagrangedichten für andere lokale Symmetrien herleiten. Historisch wurde das bereits 1954 von C.N. Yang und R. Mills für die Gruppe SU(2) durchgeführt. Der Einfachheit halber wollen wir mit diesem Beispiel beginnen. Später verallgemeinern wir die Ergebnisse auf SU(N), wobei insbesondere SU(3) für die QCD relevant ist.

Wir betrachten ein Dublett aus zwei Dirac-Feldern mit gleicher Masse m

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

Die freie Dirac-Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\,(i\not{\partial} - m)\,\psi$$

ist dann invariant unter <u>globalen</u> SU(2)-Transformationen

$$\psi(x) \to \exp\left(i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}\right)\psi(x) = \exp\left(i\alpha^j\frac{\sigma^j}{2}\right)\psi(x)$$

wobei σ^j, $j = 1,2,3$ die drei Pauli-Matrizen in dem abstrakten zweidimensionalen Raum bezeichnen, in dem die Komponenten ψ_1 und ψ_2 „leben". (Yang und Mills hatten dabei die Isospin-Komponenten des Nukleons, also Proton und Neutron im Sinn.)

Wir fordern nun, dass die Lagrangedichte unter der entsprechenden <u>lokalen</u> SU(2)-Transformation

$$\boxed{\psi(x) \to V(x)\,\psi(x)\,, \qquad V(x) := \exp\left(i\vec{\alpha}(x)\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}\right)}$$

invariant bleiben soll.

$$\Rightarrow\ \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)\,V^{\dagger}(x) = \bar{\psi}(x)\,V^{-1}(x)\,,$$

da V unitär ist $\quad (V^{\dagger}V = \mathbb{1})$

$\Rightarrow$ $m\,\bar{\Psi}(x)\Psi(x)$ ist invariant, während der Ableitungsterm wieder problematisch ist. Wir gehen daher analog zur QED vor und konstruieren eine kovariante Ableitung mit Hilfe einer 2×2-Matrix $U(y,x)$ mit

$$U(y,x) \to V(y)\,U(y,x)\,V(x)^{+},$$

$$U(x,x) = \mathbb{1}$$

und der Entwicklung

$$U(x+\varepsilon n, x) = \mathbb{1} + ig\,\varepsilon\, n^{\mu} A_{\mu}^{j}(x)\,\frac{\sigma^{j}}{2}.$$

Dabei haben wir angenommen, dass $U(y,x)$ selbst unitär ist und daher ebenfalls durch die Pauli-Matrizen erzeugt wird. Analog zur QED ergibt sich dann

$$\boxed{D_{\mu} = \partial_{\mu} - ig\,A_{\mu}^{j}(x)\,\frac{\sigma^{j}}{2}}$$

mit drei Eichfeldern $A_{\mu}^{j}(x)$, $j = 1, 2, 3$, und einer Kopplungskonstanten g.

Transformationsverhalten:

$$\mathbb{1} + ig\,\varepsilon\, n^{\mu} A_{\mu}^{j}\,\frac{\sigma^{j}}{2}$$

$$\to V(x+\varepsilon n)\left[\mathbb{1} + ig\,\varepsilon\, n^{\mu} A_{\mu}^{j}\,\frac{\sigma^{j}}{2}\right] V^{+}(x)$$

Dabei müssen wir beachten, dass V und V^{+} nicht mit σ^{j} kommutieren.

$$V(x+\varepsilon n) V^{+}(x) = \left[V(x) + \varepsilon n^{\mu} \frac{\partial V(x)}{\partial x^{\mu}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] V^{+}(x)$$

$$= \mathbb{1} + \varepsilon n^{\mu} \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x^{\mu}} \right) V^{+}(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$= \mathbb{1} - \varepsilon n^{\mu} V(x) \frac{\partial V^{+}(x)}{\partial x^{\mu}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

da $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (V V^{+}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x^{\mu}} V^{+} = - V \frac{\partial V^{+}}{\partial x^{\mu}}$

$$\Rightarrow i g \varepsilon n^{\mu} A^{i}_{\mu} \frac{\sigma^{i}}{2}$$

$$\longrightarrow - \varepsilon n^{\mu} V \frac{\partial V^{+}}{\partial x^{\mu}} + i g \varepsilon n^{\mu} V A^{i}_{\mu} \frac{\sigma^{i}}{2} V^{+}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{i}_{\mu}(x) \frac{\sigma^{i}}{2} \longrightarrow V(x) \left[A^{i}_{\mu} \frac{\sigma^{i}}{2} + \frac{i}{g} \partial_{\mu} \right] V^{+}(x)}$$

infinitesimale Transformationen:

$$V(x) = 1 + i \vec{\alpha}(x) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}$$

$$V^{+}(x) = 1 - i \vec{\alpha}(x) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}$$

$$\Rightarrow \partial_{\mu} V^{+}(x) = - i (\partial_{\mu} \vec{\alpha}(x)) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}$$

$$\Rightarrow A^{i}_{\mu}(x) \frac{\sigma^{i}}{2} \longrightarrow \left(1 + i \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \left[A^{i}_{\mu} \frac{\sigma^{i}}{2} - i \alpha^{j} A^{i}_{\mu} \frac{\sigma^{i}}{2} \frac{\sigma^{j}}{2} + \frac{1}{g} (\partial_{\mu} \alpha^{i}) \frac{\sigma^{i}}{2} \right]$$

$$= A^{i}_{\mu} \frac{\sigma^{i}}{2} + \frac{1}{g} (\partial_{\mu} \alpha^{i}) \frac{\sigma^{i}}{2} + i \alpha^{i} A^{j}_{\mu} \underbrace{\left[\frac{\sigma^{i}}{2}, \frac{\sigma^{j}}{2} \right]}_{i \varepsilon^{ijk} \frac{\sigma^{k}}{2}} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

d.h. für infinitesimale Transformationen gilt:

$$A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} \to A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} + \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^j)\frac{\sigma^j}{2} - \varepsilon^{ijk} \alpha^i A_\mu^j \frac{\sigma^k}{2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{A}_\mu \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \to \vec{A}_\mu \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + \frac{1}{g}(\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} - (\vec{\alpha} \times \vec{A}_\mu) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}_\mu \to \vec{A}_\mu + \frac{1}{g}(\partial_\mu \vec{\alpha}) - \vec{\alpha} \times \vec{A}_\mu}$$

Der letzte Term ist neu gegenüber der QED und ist ein Resultat der nicht-abelschen Natur der SU(2), d.h. der Tatsache, dass die Generatoren $\frac{\sigma^i}{2}$ und damit die Gruppenelemente nicht miteinander kommutieren. Dieser Term überlebt auch, wenn α nicht von x abhängt. Genauer gesagt beschreibt er eine infinitesimale Rotation der Eichfelder um die „$\vec{\alpha}$-Achse" im dreidimensionalen abstrakten Raum, der durch die σ^i aufgespannt wird („adjungierte Darstellung" der SU(2)).

Für die kovariante Ableitung ergibt sich

$$\boxed{D_\mu \psi \to \left(1 + i \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) D_\mu \psi},$$

was dem erwarteten Verhalten $D_\mu \psi \to V D_\mu \psi$ für infinitesimale Transformationen entspricht.

Analog zur QED gilt

$$[D_\mu, D_\nu]\,\psi(x) \to V(x)\,[D_\mu, D_\nu]\,\psi(x)$$

wobei sich jetzt aber für den Kommutator ergibt

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu - igA_\mu^i \tfrac{\sigma^i}{2}, \partial_\nu - igA_\nu^j \tfrac{\sigma^j}{2}]$$

$$= -ig(\partial_\mu A_\nu^j \tfrac{\sigma^j}{2} - \partial_\nu A_\mu^j \tfrac{\sigma^j}{2})$$

$$- g^2 \underbrace{[A_\mu^i \tfrac{\sigma^i}{2}, A_\nu^j \tfrac{\sigma^j}{2}]}_{i\varepsilon^{ijk} A_\mu^i A_\nu^j \frac{\sigma^k}{2}}$$

$$\equiv -ig\, G_{\mu\nu}^k \tfrac{\sigma^k}{2}$$

mit dem Feldstärketensor

$$\boxed{G_{\mu\nu}^k = \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k + g\,\varepsilon^{ijk} A_\mu^i A_\nu^j}$$

neu gegenüber QED

Mit $\psi \to V\psi$

und $[D_\mu, D_\nu]\,\psi \to V\,[D_\mu, D_\nu]\,\psi$

folgt für das Transformationsverhalten

$$[D_\mu, D_\nu] \to V\,[D_\mu, D_\nu]\,V^+$$

$$\Leftrightarrow \boxed{G_{\mu\nu}^k \tfrac{\sigma^k}{2} \to V\, G_{\mu\nu}^k \tfrac{\sigma^k}{2}\, V^+}$$