$$\frac{d\Sigma}{d\not p} = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx \left\{ -(1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2 x}{\Delta(x)-i\varepsilon}\right) - [2m-\not p(1-x)]\, 2\, \frac{-x(1-x)}{\Delta(x)-i\varepsilon}\not p \right\} - \delta_2$$

$$\xrightarrow{\not p \to m} \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx \left\{ -(1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2 x}{m^2x^2+\mu^2(1-x)}\right) + 2m^2\frac{[2-(1-x)]\,x(1-x)}{m^2x^2+\mu^2(1-x)} \right\} - \delta_2$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \delta_2 = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\, \{ \dots \}$$

Für δm ergibt sich dann

$$\delta m = -\frac{\alpha}{2\pi}\, m \int_0^1 dx \left\{ 2\ln\left(\frac{\Lambda^2 x}{m^2x^2+\mu^2(1-x)}\right) - 2m^2\frac{[2-(1-x)]\,x(1-x)}{m^2x^2+\mu^2(1-x)} \right\}$$

und schließlich für die gesamte Selbstenergie

$$\Sigma(p) = \Sigma_{loop}(p) - \delta_2 \not p + \delta m$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx \Big\{ [2m-\not p(1-x)]\ln\left(\frac{\Lambda^2 x}{\Delta(x)-i\varepsilon}\right) + \not p(1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2 x}{m^2x^2+\mu^2(1-x)}\right) - 2m^2\not p\,\frac{[2-(1-x)]\,x(1-x)}{m^2x^2+\mu^2(1-x)} - 2m\ln\left(\frac{\Lambda^2 x}{m^2x^2+\mu^2(1-x)}\right) + 2m^3\frac{[2-(1-x)]\,x(1-x)}{m^2x^2+\mu^2(1-x)} \Big\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma(p) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx \left\{ [2m - \not p(1-x)] \ln\left(\frac{m^2x^2+\mu^2(1-x)}{m^2x+\mu^2(1-x)-p^2x(1-x)-i\varepsilon}\right) - 2(\not p - m)\frac{m^2(1+x)x(1-x)}{m^2x^2+\mu^2(1-x)} \right\}}$$

- Die Pauli-Villars-Masse Λ tritt nicht mehr auf, der Ausdruck ist konvergent.

- Die Renormierungsbedingung $\Sigma|_{\not p \to m} = 0$ ist offensichtlich erfüllt: In der ersten Zeile verschwindet der Logarithmus, in der zweiten $(\not p - m)$.

- Die Renormierungsbedingung $\left.\frac{d\Sigma}{d\not p}\right|_{\not p \to m} = 0$ ist ebenfalls erfüllt, wie man leicht nachrechnen kann.

- $\Sigma(p)$ hat für $p^2 > (m+\mu)$ einen Imaginärteil und damit verbunden in der komplexen Ebene einen Cut entlang der reellen p^2-Achse.

- Für $\mu \to 0$ wird der Integrand

$$\{\ldots\} \to [2m - \not p(1-x)] \ln\left(\frac{m^2 x}{m^2 - p^2(1-x) - i\varepsilon}\right) - 2(\not p - m)\frac{1-x^2}{x}$$

$\to$ Sowohl der Logarithmus als auch der zweite Term divergieren für $x \to 0$.

Das Integral über den Logarithmus bleibt endlich, aber $\int_0 dx \frac{1}{x}$ ist divergent.
Dieses Problem tritt in der QED häufiger bei solchen „Strahlungskorrekturen" auf, wie z.B. auch bei der Vertexkorrektur , die ja auch über Ward-Takahashi-Identitäten mit der Elektron-Selbstenergie  verwandt ist. Der tiefere Grund dieser Infrarot-Divergenzen, die mit kleinen Photon-Impulsen zusammenhängen, liegt in der Tatsache, dass im Limes extrem weicher Photonen experimentell nicht mehr aufgelöst werden kann, ob ein einzelnes Elektron oder ein Elektron und ein weiches Photon vorliegt. Beschränkt man sich auf tatsächlich messbare Prozesse, z.B. auf Streuprozesse geladener Teilchen, bei denen kein Photon oberhalb einer vorgegebenen Schwellenenergie erzeugt wird, bleiben die Wirkungsquerschnitte im Limes $\mu^2 \to 0$ endlich. Eine ausführliche Diskussion dieses Problems findet sich z.B. in Peskin / Schroeder Kap. 6. Wir werden im Folgenden nicht weiter darauf eingehen und $\mu^2 \neq 0$ lassen.

ii) Zum Vergleich wollen wir die Divergenzen von Σ jetzt in dimensionaler Regularisierung „zähmen". Dazu werten wir das Diagramm zunächst in

$$d = 4 - \varepsilon$$

Dimensionen aus. (s. dazu auch 4. Übungsblatt). Für die γ-Matrizen gilt:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = d$$
$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -(d-2)\gamma^\nu \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu \not{a}\, \gamma_\mu = -(d-2)\not{a}$$

$$\Rightarrow \Sigma_{Loop}(p) = e^2 \int_0^1 dx \,[d\, m - (d-2)\not{p}\,(1-x)] \underbrace{\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta(x) - i\tilde{\varepsilon}]^2}}_{= I_d}$$

$$I_d = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{[l_E^2 + \Delta(x) - i\tilde{\varepsilon}]^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(\Delta - i\tilde{\varepsilon})^{2-d/2}}$$

$$\Rightarrow \Sigma_{Loop}(p) = \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(\Delta(x) - i\tilde{\varepsilon})^{2-\frac{d}{2}}} [d\,m - (d-2)\not{p}\,(1-x)]$$
$$= \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{(\Delta(x) - i\tilde{\varepsilon})^{\varepsilon/2}} [(4-\varepsilon)m - (2-\varepsilon)(1-x)\not{p}]$$

Dabei ist nach wie vor $\Delta(x) = m^2 x + \mu^2(1-x) - p^2 x(1-x)$

$$\Rightarrow \Sigma_{Loop}\Big|_{\not{p} \to m} = \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{\Delta_0^{\varepsilon/2}(x)} [4 - 2(1-x) - \varepsilon x]$$

mit $\quad \Delta_0 := m^2 x^2 + \mu^2(1-x)$

$$\left.\frac{d\Sigma_{loop}}{d\not p}\right|_{\not p\to m} = \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Delta_0^{\varepsilon/2}(x)}\Big\{-(2-\varepsilon)(1-x)$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\Delta_0(x)}\,x(1-x)\,2m^2\left[4-2(1-x)-\varepsilon x\right]\Big\}$$

$$= \delta_2$$

$$\Rightarrow\quad \delta m = -\Sigma_{loop}\Big|_{\not p\to m} + \delta_2 m$$
$$= -\frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Delta_0^{\varepsilon/2}}\Big\{4-\varepsilon$$
$$-\varepsilon\,\frac{m^2}{\Delta_0(x)}\,x(1-x)\left[4-2(1-x)-\varepsilon x\right]\Big\}$$

$$\Rightarrow\quad \Sigma(\not p) = \Sigma_{loop}(\not p) - \delta_2\not p + \delta m$$

$$= \Sigma_{loop}(\not p) - \Sigma_{loop}\Big|_{\not p\to m} - \delta_2(\not p - m)$$
$$= \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$\times\Big\{\frac{1}{(\Delta-i\varepsilon)^{\varepsilon/2}}\Big[4m-2(1-x)\not p$$
$$-\varepsilon\left(m-(1-x)\not p\right)\Big]$$
$$-\frac{m}{\Delta_0^{\varepsilon/2}}\left[4-2(1-x)-\varepsilon x\right]$$
$$-\frac{\not p-m}{\Delta_0^{\varepsilon/2}}\Big[-(2-\varepsilon)(1-x)$$
$$+\varepsilon\,\frac{m^2}{\Delta_0}\,x(1-x)\left[4-2(1-x)-\varepsilon x\right]\Big]\Big\}$$

Von diesem Ausdruck betrachten wir nun den Limes $d \to 4$ bzw. $\varepsilon \to 0$.

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad , \quad \gamma \approx 0{,}577$$

$$\Delta^{-\varepsilon/2} = e^{-\frac{\varepsilon}{2}\ln\Delta} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}\ln\Delta + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\{\ldots\}$$

$$= \frac{2}{\varepsilon}\Big[\underbrace{4m - 2(1-x)\not{p} - 4m + 2(1-x)m + 2(\not{p}-m)(1-x)}_{=0}\Big]$$

$$+ \varepsilon^0 \Big[-\ln(\Delta - i\varepsilon)\left[4m - 2(1-x)\not{p}\right] - 2(m-(1-x)\not{p})$$
$$+ \ln(\Delta_0)\left[4m - 2(1-x)m\right] + 2mx$$
$$-(\not{p}-m)\ln(\Delta_0)\, 2(1-x) - 2(\not{p}-m)(1-x)$$
$$-2(\not{p}-m)\frac{m^2}{\Delta_0}x(1-x)\left[4-2(1-x)\right]$$
$$-\gamma\left(\text{Terme wie bei } \tfrac{2}{\varepsilon} = 0\right) \Big]$$

$$+\mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$= -\ln(\Delta - i\varepsilon)\left[4m - 2(1-x)\not{p}\right]$$
$$+ \ln(\Delta_0)\left[4m - 2(1-x)m - 2(1-x)(\not{p}-m)\right]$$
$$-2m + 2mx + 2(1-x)(\not{p} - \not{p} + m)$$
$$-2(\not{p}-m)\frac{m^2}{\Delta_0}x(1-x)\left[4-2(1-x)\right]$$

$$= \ln\left(\frac{\Delta_0}{\Delta - i\varepsilon}\right)\left[4m - 2(1-x)\not{p}\right]$$
$$-4(\not{p}-m)\frac{m^2(1+x)x(1-x)}{\Delta_0}$$

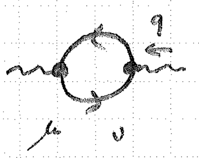
Vorfaktor: $\dfrac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} = \dfrac{e^2}{(4\pi)^2} + O(\varepsilon) = \dfrac{\alpha}{4\pi} + O(\varepsilon)$

$$\Rightarrow \quad \Sigma(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left\{ \ln\left(\frac{\Delta_0(x)}{\Delta(x) - i\varepsilon}\right) \left[2m - (1-x)\not p\right] - 2(\not p - m)\frac{m^2(1+x)x(1-x)}{\Delta_0} \right\}$$

stimmt mit dem Pauli-Villars-regularisierten Ergebnis überein!
Insbesondere bleibt $\Sigma(p)$ im Limes $\varepsilon \to 0$ endlich.

2. Photon-Polarisationsfunktion

Notation:

Vorlesung:  $= -i\Pi^{\mu\nu}(q) = -ie^2 J(q^2)\left(g^{\mu\nu} - \dfrac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)$

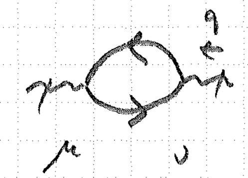
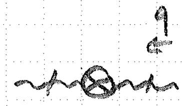
Übung: $= +i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = +ie^2 J(q^2)\left(g^{\mu\nu} - \dfrac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)$

Peskin/Schroeder $= +i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = +i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\,\Pi_2(q^2)$

$$\Rightarrow \quad \Pi_2(q^2) = -\frac{e^2}{q^2} J(q^2)^{\text{Vorlesung}} = +\frac{e^2}{q^2} J(q^2)^{\text{Übung}}$$

Um Verwirrungen zwischen Vorlesungs- und Übungsnotation zu vermeiden, verwenden wir ab jetzt die Peskin/Schroeder-Notation.

Dann gilt:

$i\Pi^{\mu\nu}(q) =$  $+$ 

$$= i\Pi_2^{\mu\nu}(q) - i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\,\delta_3$$

$$= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\left(\Pi_2(q^2) - \delta_3\right)$$

$$\equiv i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\,\Pi(q^2)$$

$$\Rightarrow \Pi(q^2) = \Pi_2(q^2) - \delta_3$$

Renormierungsbedingung: $\Pi(q^2=0) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \delta_3 = \Pi_2(q^2=0)$$

$$\Pi_2(q^2) = \frac{e^2}{q^2}\,J(q^2) \quad \text{(Übung)}$$

$$\underset{\text{4. Übung}}{=} -\frac{8e^2}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\, x(1-x)\,\frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{\Delta^{\varepsilon/2}} \qquad \text{(in dim. Reg., } \varepsilon = 4-d\text{)}$$

mit $\Delta \equiv m^2 - x(1-x)q^2 - i\varepsilon$

$$\Rightarrow \delta_3 = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\, x(1-x)\,\frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{(m^2)^{\varepsilon/2}}$$

$$\Rightarrow \Pi(q^2) = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\, x(1-x)\,\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{1}{\Delta^{\varepsilon/2}} - \frac{1}{(m^2)^{\varepsilon/2}}\right)$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} -\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 dx\, x(1-x)\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma\right)\left(1 - 1 - \frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{\Delta}{m^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi(q^2) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx\, x(1-x)\ln\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\varepsilon}{m^2}}$$

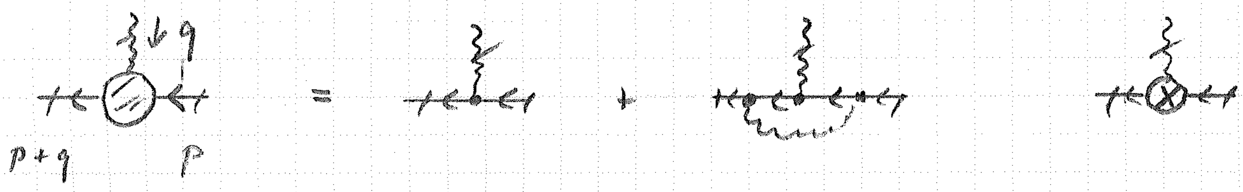
Die Polarisationsfunktion erhält einen Imaginärteil, wenn $x(1-x)\,q^2 > m^2$ werden kann.

$$\max\left(x(1-x)\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Im} \Pi(q^2) \neq 0$ für $q^2 > 4m^2$.

In diesem Fall ist die Erzeugung eines reellen Elektron-Positron-Paars kinematisch möglich.

3. Elektron-Photon-Vertex



$$-ie\Gamma^\mu(p+q,p) = -ie\gamma^\mu - ie\Gamma^\mu_{Loop}(p+q,p) - ie\delta_1\gamma^\mu$$

Renormierungsbedingung: $\Gamma^\mu(p,p) \stackrel{!}{=} \gamma^\mu$

$$\Rightarrow \Gamma^\mu_{Loop}(p,p) + \delta_1\gamma^\mu = 0$$

konkrete Auswertung ($\rightarrow$ Übung): $\delta_1 = \delta_2$

$$\Rightarrow Z_1 = Z_2$$

$$\Rightarrow e = Z_3^{1/2} e_0 = (1+\delta_3)^{1/2} e_0$$