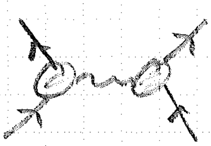
Nachtrag

Erinnerung:

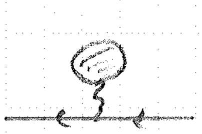
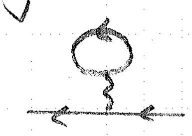
Die in diesem Abschnitt analysierten Diagramme sind amputierte 1PI-Amplituden, die als solche Bestandteile größerer Nicht-1PI-Diagramme sein können. Es geht daher <u>nicht</u> darum, ob diese Diagramme für sich genommen kinematisch möglich sind. Kinematische Einschränkungen kommen im konkreten Fall noch hinzu.

z.B. ist der Prozess $\gamma \to e^+e^-$ kinematisch nicht möglich, da die drei Teilchen bei Viererimpulserhaltung nicht gleichzeitig on-shell sein können. Trotzdem existiert die Amplitude  aber für off-shell-Impulse und geht z.B. in Streuprozesse



ein.

Analog könnte man sich zunächst vorstellen, dass die Amplitude  als Bestandteil eines Nicht 1-PI-Diagramms „überlebt", z.B.

 =  + ...

Das Ergebnis  = 0 besagt jedoch, dass das (anders als z.B. in der Yukawa-Theorie) nicht der Fall ist.

Verallgemeinere auf d Raumzeit - Dimensionen

$D = dL - P_e - 2P_\gamma$

$$\Rightarrow \boxed{D = d + \left(\frac{d-4}{2}\right) V - \left(\frac{d-2}{2}\right) N_\gamma - \frac{d-1}{2} N_e}$$

<u>$d = 4$</u>: V fällt heraus

$\rightarrow$ endliche Anzahl divergenter 1PI - Ampl., divergente Diagramme zu allen Ordnungen Störungstheorie

„renormierbar"

<u>$d < 4$</u>: D wird mit steigendem V kleiner

$\rightarrow$ endliche Anzahl oberflächlich divergenter Diagramme

„super - renormierbar"

<u>$d > 4$</u>: D wird mit steigendem V größer

$\rightarrow$ Alle Amplituden werden in genügend hoher Ordnung Störungstheorie divergent (∞ viele primitiv divergente Diagramme)

„nicht renormierbar"

Dimension der Felder und Kopplungskonstanten

$$[S] = [S = \int d^d x\, \mathcal{L}\,] = 1$$

$$\rightsquigarrow [\psi] = [\text{Energie}]^{\frac{d-1}{2}}, \quad [A_\mu] = [\text{Energie}]^{\frac{d-2}{2}}$$

$$[e] = [\text{Energie}]^{n}, \quad n = \frac{4-d}{2} \begin{cases} > 0 & \text{superrenb.} \\ = 0 & \text{renormierb.} \\ < 0 & \text{nicht renb.} \end{cases}$$

allgemeines Kriterium,
auch für andere Theorien
(vgl. Kap. V.1)

IX.2 Counterterm-Renormierung der QED

Im Kap. VII.2 haben wir gesehen, dass die Massen und Kopplungen in der Lagrange-Dichte mit den nackten Größen m_0 und e_0 identifiziert werden sollten. Außerdem haben wir die renormierten Felder

$$\psi_R = Z_2^{-1/2}\psi \quad \text{und} \quad A_R^\mu = Z_3^{-1/2} A^\mu$$

eingeführt ($\Rightarrow \bar\psi_R = Z_2^{-1/2}\bar\psi$, $F_R^{\mu\nu} = Z_3^{-1/2} F^{\mu\nu}$).

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{QED} = \bar\psi(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi - \tfrac{1}{4}(F^{\mu\nu})^2 - e_0\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu$$

$$= Z_2\,\bar\psi_R(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi_R - \tfrac{1}{4} Z_3 (F_R^{\mu\nu})^2$$

$$- Z_2 Z_3^{1/2} e_0\, \bar\psi_R\gamma^\mu\psi_R A_{R\mu}$$

Wir wollen nun versuchen, die Lagrange-Dichte ausschließlich durch renormierte Größen auszudrücken.
Für die Ladung hatten wir gefunden

$$e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_0$$

(wobei sich auf Grund von Ward-Identitäten ergibt, dass $Z_1 = Z_2$ gilt, aber das wollen wir vorläufig nicht ausnutzen).

$$\Rightarrow Z_2 Z_3^{1/2} e_0 = Z_1 e$$

Außerdem definieren wir

$$Z_1 = 1 + \delta_1 \,, \quad Z_2 = 1 + \delta_2 \,, \quad Z_3 = 1 + \delta_3$$

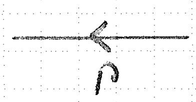
sowie $\quad Z_2 m_0 = m + \delta m$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{QED} = (1+\delta_2)\bar{\psi}_R i\not{\partial}\psi_R - (m+\delta m)\bar{\psi}_R\psi_R - \tfrac{1}{4}(1+\delta_3)(F_R^{\mu\nu})^2 - (1+\delta_1) e \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R A_{R\mu}$$

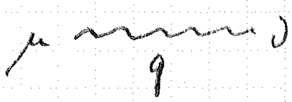
$$= \bar{\psi}_R(i\not{\partial} - m)\psi_R - \tfrac{1}{4}(F_R^{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R A_{R\mu} + \bar{\psi}_R(i\delta_2\not{\partial} - \delta m)\psi_R - \tfrac{1}{4}\delta_3(F_R^{\mu\nu})^2 - e\,\delta_1\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R A_{R\mu}$$

$\hat{=}$ ursprüngliche QED-Lagrange-Dichte mit physikal. Massen und Ladungen und renormierten Feldern
+ zusätzliche Terme („Counterterme")

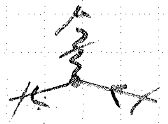
Der erste Teil führt auf die bekannten Feynman-Regeln mit physikalischen Massen und Ladungen:



$$= \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} = i\,\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

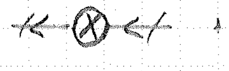


$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}$$ (Feynman-Eichung)

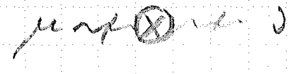


$$= -ie\gamma^\mu .$$

Die Counter-Terme entsprechen zusätzlichen Wechselwirkungen mit folgenden Feynman-Regeln:



$$= i(\delta_2 \not{p} - \delta m)$$



$$= -i(g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu)\,\delta_3$$ 1)

$$= -ie\,\delta_1\,\gamma^\mu$$

↪ vier neue Parameter $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta m$

≙ " alte " e_0, Z_2, Z_3, m_0

≙ " divergente Taylor-Koeffizienten der primitiv divergenten Diagramme

Die Werte dieser Parameter in einer gegebenen Ordnung Störungstheorie werden durch vier Renormierungsbedingungen bestimmt.

Renormierungsbedingungen:

1. Die Masse des Elektrons bleibt nach den loop-Korrekturen unverändert bei m.

2. Das Residuum des Elektron-Propagators bleibt bei 1.

3. Das Residuum des Photon-Propagators bleibt unverändert.

4. Die Elektron-Ladung bleibt am Renormierungspunkt beim Wert e.

konkret:

- gedresster Elektron-Propagator (vgl. VII.2.1):

$$S^{-1}(p) = \not{p} - m - \Sigma(p) + i\varepsilon$$

$$\Sigma(p) = A(p^2)\not{p} + B(p^2)$$

$$\Rightarrow S^{-1}(p) = (1 - A(p^2))\left[\not{p} - \frac{m + B(p^2)}{1 - A(p^2)} + i\varepsilon\right]$$

$$\left(\begin{array}{l} 1.\ \&\ 2.: \quad S^{-1}(p)\Big|_{p^2 = m^2} \overset{!}{=} \not{p} - m + i\varepsilon \\ \\ \Rightarrow A(m^2) \overset{!}{=} 0 \quad , \quad B(m^2) \overset{!}{=} 0 \end{array}\right)$$

$\hookrightarrow$ „Korrektur" auf S. IX - 18

- gedresste Photon-Propagator (vgl. VII.2.2):

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(q^2) = \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + e^2 J(q^2) + i\varepsilon} + \text{eichabh. longit. Terme}$$

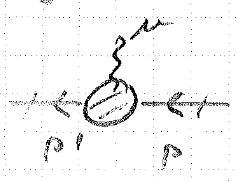
mit $e^2 J(q^2) = e^2 [\underbrace{J(0)}_{=0} + q^2 J'(0) + \tilde{J}(q^2)]$

$$\equiv -q^2 \Pi(q^2) \quad (\hat{=} \text{ Notation Peskin/Schroeder})$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_{\mu\nu}(q^2) = \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2(1 - \Pi(q^2)) + i\varepsilon} + \text{longit.}$$

3. : $\Pi(q^2 = 0) \overset{!}{=} 0$

- gedresster Elektron-Photon-Vertex (vgl. VII.2.3):



$$= -ie\,\Gamma^\mu(p', p)$$

$$= -ie \left(F_1(q^2)\gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right)$$

$$(q = p' - p)$$

Renormierungspunkt: $q = 0$

4. : $\Gamma^\mu(p, p) \overset{!}{=} \gamma^\mu$

$$(\Leftrightarrow F_1(0) \overset{!}{=} 1)$$

Vorgehensweise:

- Berechne $\Sigma(p) = A(p^2)\not{p} + B(p^2)$, $\Pi(q^2)$ und $\Gamma(p', p)$ in der gewünschten Ordnung Störungstheorie einschließlich Counterterm-Diagramme und wähle die Counterterm-Parameter, so dass die Renormierungsbedingungen erfüllt sind.

- Für die Systematik der Störungsentwicklung müssen wir den Countertermen selbst Ordnungen in der Kopplungskonstante zuweisen. Dazu entwickeln wir zunächst

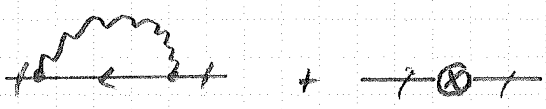
$$\delta m = \sum_{n=0}^{\infty} \delta m^{(n)}, \quad \delta_1 = \ldots, \quad \ldots$$

wobei $\delta m^{(n)}$ etc von der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^n) = \mathcal{O}(e^{2n})$ sind.

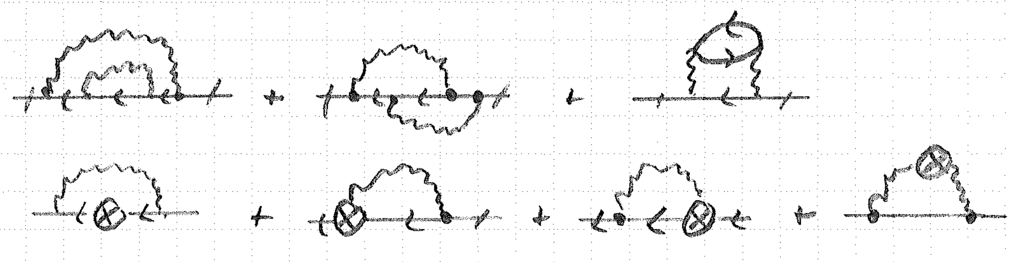
Da die Tree-level-Propagatoren und -Vertizes die Renormierungsbedingungen von sich aus erfüllen, verschwinden die die $\mathcal{O}(\alpha^0)$-Anteile der Counterterme, d.h. die Counterterme sind von der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$.

Beispiel: Elektron-Selbstenergie

- $O(\alpha)$

$-i\,\Sigma^{(1)}(p) =$ 

- $O(\alpha^2)$

$-i\,\Sigma^{(2)} =$ 

(jeweils $O(\alpha)$-Counterterme)

$+$  ($O(\alpha^2)$-Anteil)