

IX Systematisches Renormieren

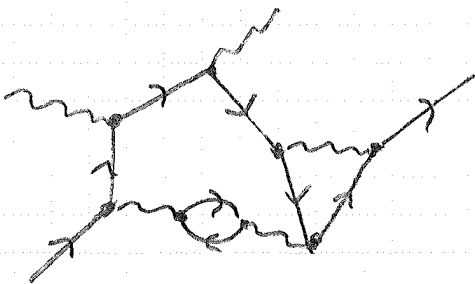
IX.1 Divergenzgrade von Feynman-Diagrammen

In Kap. VII haben wir bereits den oberflächlichen Divergenzgrad eingeführt und für einige Feynman-Diagramme berechnet. Wir wollen uns das jetzt für die QED etwas systematischer ansehen.

Dazu definieren wir:

- N_e = Zahl externer Fermion-Linien
- N_γ = " " " Photon - "
- P_e = " der Fermion-Propagatoren
- P_γ = " " Photon - "
- V = " " Vertices
- L = " " Loops

Bsp.:



$$N_e = 2$$

$$N_\gamma = 2$$

$$P_e = 7$$

$$P_\gamma = 3$$

$$V = 8$$

$$L = 3$$

Impulsverhalten:

- Fermion-Propagator: $\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sim \frac{1}{p}$
- Photon - " : $\frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \sim \frac{1}{p^2}$
- Loops: d^4p

→ Oberflächlicher Divergenzgrad:

$$D = 4L - P_e - 2P_\gamma$$

naive Erwartung:


$D > 0$: Diagramm divergiert $\sim \Lambda^D$, Λ = Impuls-Cutoff

$D = 0$: " " $\sim \ln \Lambda$

$D < 0$: " konvergiert

Ausnahmen:

i) "Tree-level"-Diagramme ($L=0$) sind immer endlich:

z. B.  endlich, obwohl $D=0$

ii) Divergenden können sich auf Grund von Symmetrien vermeiden.

z. B.  $D = 4 - 2 = 2$,

aber nur log. divergent (vgl. VII-16 u. Aufg. 4)

iii) Die Divergenz kann stärker sein als erwartet, wenn das Diagramm divergente Subdiagramme enthält.

e. B.  : $D = 4 - 2 - 4 = -2$

aber log. div., da  log. div.

Wir können die Formel für D auch durch andere Größen ausdrücken:

• ursprüngliche Feynman-Regeln im Impulsraum:

- Integration über jeden Propagator-Impuls (von der Fourier-Transformation)
- δ -Funktion an jedem Vertex
- Erhaltung des Gesamt-Dreisimpulses

$\Rightarrow L =$ freie Impulsintegrationen

$$= P_e + P_\gamma - V + 1$$

- - Jeder Vertex verbindet zwei Fermionlinien mit einem Photon
- Jeder Propagator grenzt an zwei, jede externe Linie an einen Vertex

$$\Rightarrow V = 2 P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2} (2 P_e + N_e)$$

=>

$$D = 4 - N_f - \frac{3}{2} N_e$$

- D hängt nur von der Zahl der externen Linien ab!

Bsp.: Diagramm von S. IX-1:

$$4L - P_e - 2P_f = 12 - 7 - 6 = -1$$

$$4 - N_f - \frac{3}{2} N_e = 4 - 2 - 3 = -1 \quad \checkmark$$

- Nur Diagramme mit wenigen externen Linien sind oberflächlich divergent (endlich viele Diagramm-Klassen). Welche sind das?

Es genügt, 1PI-Diagramme zu analysieren, da alle anderen Diagramme daraus zusammengesetzt werden können.

Dann findet man:

	N_f	N_e	D	Diagramm
a)	0	0	4	
b)	1	0	3	
c)	2	0	2	
d)	3	0	1	
e)	4	0	0	
f)	0	2	1	
g)	1	2	0	

$\bigcirc, \bigcirc_{01}, \dots$ = Summe aller PI-Diagramme mit der entsprechenden Anzahl externer Linien.

$$a) \bigcirc = \bigcirc_{\text{wavy}} + \bigcirc_{\text{wavy}} + \bigcirc_{\text{wavy}} + \bigcirc_{\text{wavy}} + \dots$$

= Vakuum-Blasen (\leftrightarrow Vakuum-Energie)

fällt in Korrelationsfunktionen und S-Matrixelementen heraus \rightarrow nicht beobachtbar

$$b) \bigcirc_{\text{ph}} = \bigcirc_{\text{ph}}^{\text{crossed}}, \text{ da das externe Photon an ein internes Fermion koppeln muss}$$

$$= -ie \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle \Omega | T (\underbrace{\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)}_{j^\mu(x)}) | \Omega \rangle$$

$$= 0$$

Begründung:

i) Lorentz-Invarianz

($\langle \Omega | T j^\mu(x) | \Omega \rangle$ hat eine ausgezeichnete Richtung)

ii) Ladungskonjugation:

$$C | \Omega \rangle = | \Omega \rangle, \quad C j^\mu(x) C^\dagger = -j^\mu(x)$$

$$\Rightarrow \langle \Omega | T j^\mu | \Omega \rangle = \langle \Omega | C^\dagger C T j^\mu C^\dagger C | \Omega \rangle$$

$$= \langle \Omega | C^\dagger T (C j^\mu C^\dagger) C | \Omega \rangle$$

$$= - \langle \Omega | T j^\mu | \Omega \rangle = 0$$

Verallgemeinerung:

Der Vakuum-Erwartungswert einer ungeraden Zahl von elektromagnetischen Strömen verschwindet. ("Furry-Theorem")

=> d)  = 0

f)  = $-i \Sigma(p)$ (Elektron-Selbstenergie, s. VII.2.1)

Taylor-Entwicklung um $p=0$:

$$\Sigma(p) = A_0 + A_1 p + A_2 p^2 + \dots$$

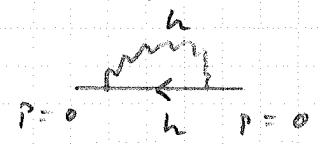
$D=1 \Rightarrow$ naive Erwartung:

$$A_0 \sim \Lambda, \quad A_1 \sim \ln \Lambda, \quad A_{n \geq 2} \text{ endl.}$$

Entsächlich: $A_0 \sim m \ln \Lambda$

↑
gilt nicht bei divergenten Subdiagrammen

Beispiel:

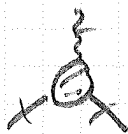


$$= (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \overset{\text{ungerade}}{\frac{k + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon}} \gamma^\nu \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

$$= -4m e^2 \underbrace{\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{k^2 + i\epsilon}}_{\sim \ln \Lambda}$$

tieferer Grund: Für $m=0$ gibt es eine Symmetrie ("chirale Symmetrie"), die eine Verschreibung der Masse verbietet.


$$\leadsto \Sigma(p) = (a_0 m + a_1 \not{p}) \ln \Lambda + \text{endl. Terme}$$

g)  = $-ie \Gamma^\mu$ (Elektron-Photon-Vertex)

$$D = 0 \leadsto \text{log. div.}$$

hier: keine Überraschung

$$-ie \Gamma^\mu \sim -ie \gamma^\mu \ln \Lambda + \text{endl. impulsabh. Terme (vgl. VII. 2.3)}$$

c)  = $-i \Pi^{\mu\nu}$ (Photon-Polarisation)

$$D = 2 \leadsto \text{naiv: } \sim \Lambda^2$$

VII. 2.2: $\Pi^{\mu\nu}(q^2) = J(q^2) T^{\mu\nu}$, $J(0) = 0$
(Ward-Identität, Eichinvarianz)

$$\equiv \Pi(q^2) (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu)$$

\leadsto nur log. divergent (da konstante und lin. Terme verschw.)

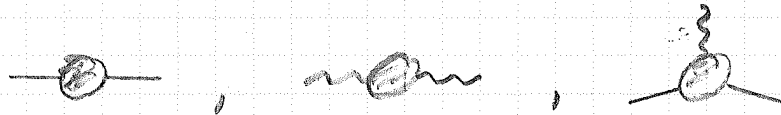
e) Ward-Identität:

$$k_\mu \left(\text{diagram with photon line and fermion lines} \right) = k_\nu (\dots) = \dots = 0$$

\leadsto Diagramm ist endlich

Fazit:

- Es gibt nur drei „primitiv divergente“ Amplituden der QED:



(+ eine unendl. Zahl von Diagrammen, die divergent sind, weil sie primitiv divergente Amplituden als Komponenten beinhalten.)

- Zu den drei primitiv divergenten Diagrammen gehören vier jeweils logarithmisch divergente Koeffizienten in Taylor-Entwicklungen.
Diese stehen in der QED vier Parameter in der Lagrange-Dichte gegenüber, durch die die Theorie renormiert werden kann:
 - Normierung des Photon-Feldes
 - " " " Elektron "
 - nackte Masse des Elektrons
 - nackte Ladung " "

=> Die QED ist vollständig renormierbar!