Analog zu S. VIII - 12 erhalten wir dann für die 2-Punkt-Korrelationsfunktion:

$$\boxed{\begin{aligned}&\langle\Omega|\, T\left\{\phi_H(x_1)\,\phi_H(x_2)\right\}|\Omega\rangle \\ &= \lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty} \frac{\int \mathcal{D}\phi\;\phi(x_1)\,\phi(x_2)\,\exp\left[i\int_{-\tau}^{\tau}dt\int d^3x\,\mathcal{L}\right]}{\int \mathcal{D}\phi\;\exp\left[i\int_{-\tau}^{\tau}dt\int d^3x\,\mathcal{L}\right]}\end{aligned}}$$

und entsprechend für höhere n-Punkt-Korrelationsfunktionen.

VIII.3 Funktionalableitungen und erzeugendes Funktional

Beim Pfadintegral verallgemeinert man das Konzept der Integration über Koordinaten auf eine Integration über Funktionen. Analog kann man auch nach Funktionen ableiten, indem wir die Ableitungsregeln für Koordinaten,

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j a_j x_j = a_i$$

auf kontinuierliche Funktion verallgemeinern:

$$\frac{\delta f(y)}{\delta f(x)} = \delta^4(x-y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta}{\delta f(x)}\int d^4y\; f(y)\,g(y) = g(x)$$

„Funktionalableitung" (in vier Dimensionen)

Ansonsten gelten die üblichen Ableitungsregeln, z. B.

- $$\frac{\delta}{\delta f(x)} \exp\left[i \int d^4y\, f(y)\, g(y)\right] = i g(x) \exp\left[i \int d^4y\, f(y)\, g(y)\right]$$
  (Kettenregel)

- $$\frac{\delta}{\delta f(x)} \int d^4y\, (\partial_\mu f(y))\, v^\mu(y) \underset{\text{part. Int.}}{=} -\frac{\delta}{\delta f(x)} \int d^4y\, f(y)\, \partial_\mu v^\mu(y) = -\partial_\mu v^\mu(x)$$

Mit diesem Konzept versehen definieren wir nun das „*erzeugende Funktional*"

$$\boxed{Z[J] := \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}[\phi] + \underbrace{J(x)\, \phi(x)}_{\text{„Quell-Term"}}\right)\right]}$$

$J(x)$ = „Quelle" = beliebige Funktion

$$\Rightarrow \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right) Z[J]$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \; \phi(x_1)\, \phi(x_2) \exp\left[i \int d^4x \left(\mathcal{L} + J(x)\, \phi(x)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\langle \Omega | T\{\phi_H(x_1)\, \phi_H(x_2)\} | \Omega \rangle \\ &= \frac{1}{Z[0]} \left[\left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right) Z[J]\right]\Bigg|_{J=0} \end{aligned}}$$

(unter der Voraussetzung, dass die Zeit-Integration wieder infinitesimal in die komplexe Ebene gedreht wird)

1. freie Klein-Gordon-Theorie:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2\right]$$

$$\Rightarrow \int d^4x \, [\mathcal{L}_0 + J\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 + i\varepsilon) \phi + J\phi \right]$$

part. Int.

für die Konvergenz von $\int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \ldots}$, äquivalent zur Drehung der Zeitintegration

Erinnerung: Klein-Gordon-Propagator = Green'sche Funktion

$$(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 + i\varepsilon) D_F(x-y) = i\delta^4(x-y)$$

↳ „verschobenes Feld":

$$\phi'(x) \equiv \phi(x) - i \int d^4y \, D_F(x-y) \, J(y)$$

$$\Rightarrow \int d^4x \, [\mathcal{L}_0 + J\phi]$$

$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi'(x) (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 + i\varepsilon) \phi'(x) + J(x) \phi'(x) \right]$$

$$+ \int d^4x \int d^4y \Big[i \frac{1}{2} \phi'(x) \underbrace{(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 + i\varepsilon) D_F(x-y) J(y)}_{i\delta^4(x-y) \, J(x)}$$

$$+ i \frac{1}{2} \underbrace{D_F(x-y) J(y) (\ldots)}_{i\delta^4(x-y) J(x) \quad (2\times \text{ part. Int.})} \phi'(x)$$

$$+ i J(x) D_F(x-y) J(y) \Big]$$

$$- \int d^4x \int d^4y \int d^4z \, \frac{1}{2} D_F(x-y) J(y) \underbrace{(\ldots) D_F(x-z) J(z)}_{i\delta^4(x-z) J(x)}$$

$$= \underbrace{\int d^4x \left[\tfrac{1}{2} \phi'(x) (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 + i\varepsilon) \phi'(x) \right]}_{\mathcal{L}_0[\phi'],\ \text{unabh. von } J} + \underbrace{\int d^4x \int d^4y\, \tfrac{1}{2} J(x)\, i D_F(x-y)\, J(y)}_{\text{unabhängig von } \phi'}$$

Pfadintegralmaß: $\quad \mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\phi'$

$$\Rightarrow Z[J] = \int \mathcal{D}\phi' \exp\left[i \int d^4x\, \mathcal{L}_0[\phi']\right]$$
$$\times \exp\left[-\tfrac{1}{2} \int d^4x \int d^4y\, J(x) D_F(x-y) J(y)\right]$$

$$= Z[0] \exp\left[-\tfrac{1}{2} \int d^4x \int d^4y\, J(x) D_F(x-y) J(y)\right]$$

$$\Rightarrow \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right) Z[J]$$

$$= - \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[0] \exp\left[-\tfrac{1}{2} \int d^4x \int d^4y\, J(x) D_F(x-y) J(y)\right]$$

$$= - \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left(-\tfrac{1}{2} \int d^4y\, D_F(x_2 - y) J(y) - \tfrac{1}{2} \int d^4x\, J(x) D_F(x - x_2)\right)$$
$$\times Z[J]$$

$$= \Big(\tfrac{1}{2} D_F(x_2 - x_1) + \tfrac{1}{2} D_F(x_1 - x_2)$$
$$+ \text{Terme, die für } J \to 0 \text{ verschwinden} \Big) \cdot Z[J]$$

$$\Rightarrow \left[\left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right) Z[J] \right]\Bigg|_{J=0} = Z[0]\, D_F(x_1 - x_2)$$

da $\quad D_F(x_2 - x_1) = D_F(x_1 - x_2)$

$$\Rightarrow \langle \Omega | T\{\phi_H(x_1)\, \phi_H(x_2)\} | \Omega \rangle \underset{\mathcal{L} = \mathcal{L}_0}{\uparrow}{=} \langle 0 | T\{\phi_H(x_1)\, \phi_H(x_2)\} | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_2)$$

✓

Höhere Korrelationsfunktionen können analog berechnet werden, z. B.

$$\langle 0 | T(\phi(x_1)\,\phi(x_2)\,\phi(x_3)\,\phi(x_4)) | 0 \rangle$$

$$= \ldots = D(x_1-x_2)\,D(x_3-x_4) + D(x_1-x_3)\,D(x_2-x_4) + D(x_1-x_4)\,D(x_2-x_3)$$

(✓ vgl. S. V-14)

2. ϕ^4-Theorie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

$$\Rightarrow \quad Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi\right)\right]$$

Störungstheorie: entwickle nach Potenzen von λ

$$\curvearrowright \quad Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \left(1 - i\int d^4x \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \ldots\right) \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi)\right]$$

$$= \left(1 - \int d^4x \frac{i\lambda}{4!}\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 + \ldots\right) \underbrace{\int \mathcal{D}\phi \, \exp\left[i\int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi)\right]}_{Z_0 = \text{erz. Funktional der freien Theorie}}$$

$$= \left(1 - \int d^4x \frac{i\lambda}{4!}\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 + \ldots\right)$$

$$Z_0[0]\, \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4y \int d^4z \; J(y)\, D_F(y-z)\, J(z)\right]$$

↑

kann weggelassen werden, wenn wir am Schluss durch $Z[0]$ teilen

Korrekturterm 1. Ordnung:

$$Z_1[J] = -\frac{i\lambda}{4!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4y \int d^4z\, J(y) D_F(y-z) J(z)\right]$$

$$= -\frac{i\lambda}{4!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 \int d^4x' \left(-D_F(x-x') J(x')\right) \exp[\ldots]$$

$$= -\frac{i\lambda}{4!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2 \Big\{-D_F(x-x) + \left(-\int d^4x' D_F(x-x') J(x')\right)^2\Big\} \exp[\ldots]$$

$$= -\frac{i\lambda}{4!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \Big\{3 D_F(0) \int d^4x' D_F(x-x') J(x') + \left(-\int d^4x' D_F(x-x') J(x')\right)^3\Big\} \exp[\ldots]$$

$$= -\frac{i\lambda}{4!}\int d^4x \Big\{3 D_F^2(0) - 6 D_F(0) \left(\int d^4x' D_F(x-x') J(x')\right)^2 + \left(\int d^4x' D_F(x-x') J(x')\right)^4\Big\} \exp[\ldots]$$

$$\Rightarrow Z_1[0] = -3\frac{i\lambda}{4!}\int d^4x\, D_F^2(0)$$

$$\Rightarrow Z[0] = 1 - 3\frac{i\lambda}{4!}\int d^4x\, D_F^2(0) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

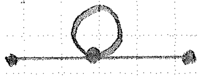
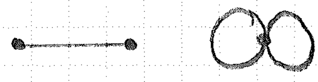
Zweipunkt-Korrelator:

$$\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right) Z_1[J] \Big|_{J=0}$$

$$= \frac{i\lambda}{4!}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int d^4x \Big\{-12\, D_F(0) D_F(x-x_2) \int d^4x' D_F(x-x') J(x') - 3 D_F^2(0) \int d^4x' D_F(x_2-x') J(x') + \text{Terme, die nicht beitragen}\Big\} \cdot \exp[\ldots] \Big|_{J=0}$$

$$= \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left\{ -12\, D_F(0)\, D_F(x-x_2)\, D_F(x-x_1) - 3\, D_F^2(0)\, D_F(x_2-x_1) \right\}$$

$$= 12 \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) \int d^4x\, D_F(x_1-x)\, D_F(x-x)\, D_F(x-x_2)$$
$$+ 3 \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) D_F(x_1-x_2) \int d^4x\, D_F^2(x-x)$$

$=$  $+$ ()

(vgl. S. V-15)

Addiert man den Beitrag nullter Ordnung und teilt durch $Z[0]$, ergibt sich

$$\langle \Omega | T\{\phi_H(x_1)\, \phi_H(x_2)\} | \Omega \rangle$$

$$= \Big(D_F(x_1-x_2) + 12 \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) \int d^4x\, D_F(x_1-x)\, D_F(0)\, D_F(x-x_2) + 3 \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) D_F(x_1-x_2) \int d^4x\, D_F^2(0) + \mathcal{O}(\lambda^2) \Big)$$
$$\cdot \left(1 + 3\, \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x\, D_F^2(0) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right)^{-1}$$

$$= \left(D_F(x_1-x_2) + \ldots \right) \left(1 - 3\, \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x\, D_F^2(0) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right)$$

$$= D_F(x_1-x_2) + 12 \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) \int d^4x\, D_F(x_1-x)\, D_F(0)\, D_F(x-x_2) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Das unverbundene Diagramm fällt heraus!