

## 2. geordneter Photon-Propagator

$$iD_{\mu\nu}(q) = iD_{\mu\nu}^{(0)}(q) + iD_{\mu\lambda}^{(0)}(q) (-i\Pi^{\lambda\sigma}(q)) iD_{\sigma\nu}(q)$$

Selbstenergie („Polarisation“) in  $\mathcal{O}(e^2)$

$$-i\Pi^{\lambda\sigma}(q) = \text{diagram} = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} [(-ie_0\gamma^\lambda) iS_0(k+q) (-ie_0\gamma^\sigma) iS_0(k)]$$

allgemeine Struktur:

- Lorentz-Tensor 2. Stufe
  - kann nur von  $q$  abhängen
- }  $\rightarrow g^{\lambda\sigma}, q^\lambda q^\sigma$

$$\Rightarrow \Pi^{\lambda\sigma}(q) = e_0^2 (J(q^2) g^{\lambda\sigma} - L(q^2) q^\lambda q^\sigma)$$

Stromerhaltung, Eichinvarianz:

$$q_\lambda \Pi^{\lambda\sigma}(q) = q_\sigma \Pi^{\lambda\sigma}(q) = 0$$

(\*) „Ward-Identitäten“, vgl. QFT I, 7. Übung:

Prozess mit  $m+n$  externen Photonen:

$$M(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n) = M^{\mu_1 \dots \mu_m \nu_1 \dots \nu_n}(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n)$$

$$E_{\mu_1}^k(p_1) \dots E_{\mu_m}^k(p_m) E_{\nu_1}^k(q_1) \dots E_{\nu_n}^k(q_n)$$

$$\Rightarrow p_{\mu_1} M^{\mu_1 \dots \nu_n} = \dots = q_{\nu_n} M^{\mu_1 \dots \nu_n} = 0$$

Beweis: später )

$$\Rightarrow q_\lambda q_\sigma \Pi^{\lambda\sigma} = e_0^2 (J(q^2) q^2 - L(q^2) q^4) = 0$$

$$\Rightarrow L(q^2) = \frac{J(q^2)}{q^2}$$

$$\Rightarrow \Pi^{\lambda\sigma}(q^2) = e_0^2 J(q^2) \left( g^{\lambda\sigma} - \frac{q^\lambda q^\sigma}{q^2} \right)$$

Def.: longitudinale und transversale Projektoren

$$L^{\mu\nu} = \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}, \quad T^{\mu\nu} = \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right)$$

$$2) L^{\mu\lambda} L_{\lambda}^{\nu} = L^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\lambda} T_{\lambda}^{\nu} = T^{\mu\nu}$$

$$L^{\mu\lambda} T_{\lambda}^{\nu} = T^{\mu\lambda} L_{\lambda}^{\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \Pi^{\lambda\sigma}(q^2) = e_0^2 J(q^2) T^{\lambda\sigma} \equiv \Pi_T T^{\lambda\sigma}$$

Ansatz für den gestrichelten Propagator:

$$D_{\mu\nu} = D_T T_{\mu\nu} + D_L L_{\mu\nu}$$

naechster Propagator:

$$D_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} = D_0 (T_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}), \quad D_0 = \frac{-1}{q^2 + i\varepsilon}$$

(Genauer genommen hängt der longitudinale Anteil von der Eichung ab und ist letztendlich irrelevant.)

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_{\mu\nu} &= D_T T_{\mu\nu} + D_L L_{\mu\nu} \\ &= D_0 (T_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}) + D_0 (T_{\mu\alpha} + L_{\mu\alpha}) \Pi_T T^{\alpha\sigma} (D_T T_{\sigma\nu} + D_L L_{\sigma\nu}) \\ &= (D_0 + D_0 \Pi_T D_T) T_{\mu\nu} + D_0 L_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_T &= D_0 + D_0 \Pi_T D_T = \frac{1}{D_0^{-1} - \Pi_T} \\ &= \frac{-1}{q^2 + e_0^2 J(q^2) + i\varepsilon} \end{aligned}$$

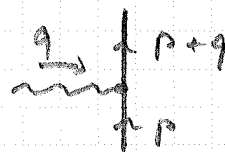
$$D_L = D_0 = \frac{-1}{q^2 + i\varepsilon}$$

$$\Rightarrow D_{\mu\nu}(q) = \frac{(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2})}{q^2 + e_0^2 J(q^2) + i\varepsilon} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 + i\varepsilon}$$

Eichinvarianz:

Die longitudinalen Anteile tragen nicht bei, wenn man den Propagator an einen erhaltenden Strom koppelt.

Bsp.:  $q_\mu \bar{u}(p+q) \gamma^\mu u(p)$



$$= \bar{u}(p+q) \not{q} u(p)$$

$$= \underbrace{\bar{u}(p+q) (\not{p} + \not{q}) u(p)} - \underbrace{\bar{u}(p+q) \not{p} u(p)} = 0$$

(adj.) Dirac. gl.:  $\bar{u}(p+q) \not{m} \quad \not{m} u(p)$

$$\leadsto D_{\mu\nu}(q) = \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + e_0^2 J(q^2) + i\varepsilon} + \text{irrelevante Anteile}$$

weitere Auswertung:

$$g_{\mu\nu} \Pi^{\mu\nu} = e_0^2 J(q^2) g_{\mu\nu} \left( g^{\mu\nu} = \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) = 3 e_0^2 J(q^2)$$

$$\Rightarrow J(q^2) = -\frac{i}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} [ \gamma^\mu S_0(k+q) \gamma_\mu S_0(k) ]$$

$$S_0(k) = \frac{k + m_0}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} = \frac{k + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \mathcal{O}(e_0^2)$$

oberflächliche Divergenz:

$$J(J(q^2)) = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \rightarrow \text{quadrat. div}$$

Die konkrete Auswertung des Integrals ergibt aber \*

$$J(0) = 0$$

\(\Rightarrow\) Der Propagator behält seinen Pol bei

$$q^2 = 0 \Rightarrow m_{\text{ph}} = 0$$

Die Photon-Masse wird nicht renormiert!  
(gilt für alle Ordnungen \(\leftrightarrow\) Eichinvarianz)

$$\Rightarrow J(q^2) = q^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{log. div.}}}{J'(0)} + \tilde{J}(q^2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{endlich}}}{}$$

\* Die Rechnung ist nicht ganz trivial: Man muss im euklidischen Radialintegral geschickt partiell integrieren und voraussetzen, dass Oberflächenanteile verschwinden (\(\rightarrow\) z.B. Pauli-Villars-Regularisierung)

$$\Rightarrow D_{\mu\nu}(q) = \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 [1 + e_0^2 J'(0)] + e_0^2 \tilde{J}(q^2) + i\epsilon} + \mathcal{O}(e_0^4)$$

$$= \frac{-g_{\mu\nu} Z_3}{q^2 + e_0^2 \tilde{J}(q^2) + i\epsilon} + \mathcal{O}(e_0^4)$$

$$\Rightarrow Z_3 = 1 - e_0^2 J'(0) + \mathcal{O}(e_0^4)$$

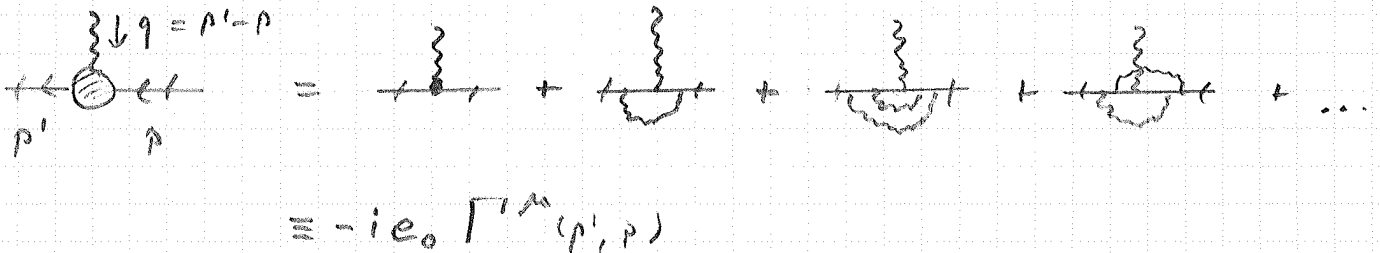
renormiertes Photon-Feld:  $A_R^\mu = Z_3^{-1/2} A^\mu$

$$\Rightarrow D_R^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + e^2 \tilde{J}(q^2) + i\epsilon} + \mathcal{O}(e^4) \quad (e = e_0 + \mathcal{O}(e_0^3) \text{ s.u.})$$

### 3. geordnetes Elektron-Photon-Vertex

nächste Elektron-Photon-Vertex:  $\overline{\psi} \not{A} \psi = -ie_0 \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$

↳ geordnetes Vertex:



$$\equiv -ie_0 \Gamma^{\mu}(p', p)$$

allgemeine Struktur:

kann nur von  $\gamma^\mu$ ,  $p^\mu$  oder  $p'^\mu$  abhängen  
(und von der Masse und Ladung des Elektrons)

$$\Rightarrow \Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu A + (p'^\mu + p^\mu) B + (p'^\mu - p^\mu) C$$

Ann.: externe Elektronen  $\rightarrow \bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p)$

Dirac-Gl.:  $\not{p} u(p) = m u(p)$

$$\bar{u}(p') \not{p}' = \bar{u}(p') m$$

=> A, B, C = skalare Funktionen von p und p'

$$p^2 = p'^2 = m^2$$

$$q^2 = (p' - p)^2 = 2m^2 - 2p \cdot p' \Leftrightarrow p \cdot p' = m^2 - \frac{q^2}{2}$$

2,  $A = A(q^2), B = B(q^2), C = C(q^2)$

• Ward-Identität:  $q_\mu \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} \underbrace{\bar{u}(p') (p' - p) u(p)}_{\rightarrow m - m = 0} A + \underbrace{\bar{u}(p') (p'^2 - p^2) u(p)}_{= m^2 - m^2 = 0}$$

$$+ \underbrace{\bar{u}(p') (p' - p)^2 u(p)}_{\neq 0} C$$

=>  $C \stackrel{!}{=} 0$

• Gordon Identität:

$$\bar{u}(p') \not{p}' u(p) = \bar{u}(p') \left[ \frac{\not{p}' + \not{p}}{2m} + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p)$$

↑  
Ladungsstrom  
(ähnlich wie der  
Vertex vom geladenen  
Spin-0-Teilchen)

↑  
Spin-Strom  
(~ magnet. Moment)

2, Drücke  $(p' + p)$ -Term durch  $\not{p}$  und  $\sigma^{\mu\nu}$  aus

$$\rightarrow \Gamma^\mu(p', p) = F_1(q^2) \not{p}' + F_2(q^2) \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m}$$

$F_1(q^2)$ : Dirac-Formfaktor

$F_2(q^2)$ : Pauli-Formfaktor

nackter Vertex:  $F_1 = 1, F_2 = 0$

Störungstheoret. Korrektur niedrigster Ordnung.

The diagram shows a fermion line (solid line with a circle) on the left. It is equal to the sum of two terms: the first is the same fermion line with a photon loop (wavy line) attached to the vertex; the second is the same fermion line with a photon loop attached to the fermion line itself. This is followed by  $+ O(e^4)$ .

$$-ie_0 \Gamma^\mu(p', p) = -ie_0 \gamma^\mu - ie_0 \delta \Gamma^\mu(p', p)$$

oberflächliche Divergenz:  $D = 4 - 2 - 2 \cdot 1 = 0$   
log. divergent

explizite Auswertung:

2)  $F_1(q^2)$  log. divergent

$F_2(q^2)$  konvergent

↳ anomales magnet. Moment (Schwinger, 1948):

$$a_e = \frac{g-2}{2} = F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,0011614$$

( $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$ )

Renormierung des  $F_1$ -Anteils:

z.B. Renormierungspunkt mit  $p' = p$  ( $= q = 0$ )

$$-ie_0 \Gamma^\mu(p, p) = -ie_0 \gamma^\mu - ie_0 \delta \Gamma^\mu(p, p) \equiv -ie_0 Z_1^{-1} \gamma^\mu$$

renormierter Vertex (vgl.  $\phi^4$ -Theorie):

$$\Gamma_R^\mu = Z_2 Z_3^{1/2} \Gamma^\mu \Rightarrow \text{renormierte Ladung:}$$

$\uparrow$  2 Elektronen       $\uparrow$  Photon  
 $e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_0$

Rechnung ergibt:  $Z_1 = Z_2$

( $\Leftrightarrow$  Ward-Identität)

$$\Rightarrow \boxed{e = Z_3^{1/2} e_0}$$

$\rightarrow$  für alle geladenen Teilchen gleich!