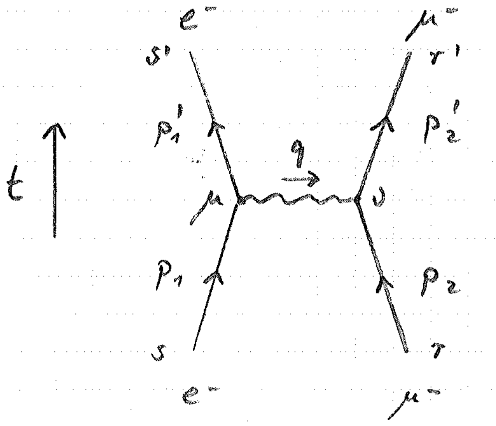
VI Elementare Prozesse der QED

VI.1 Elektron-Myon-Streuung und $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

a) $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$

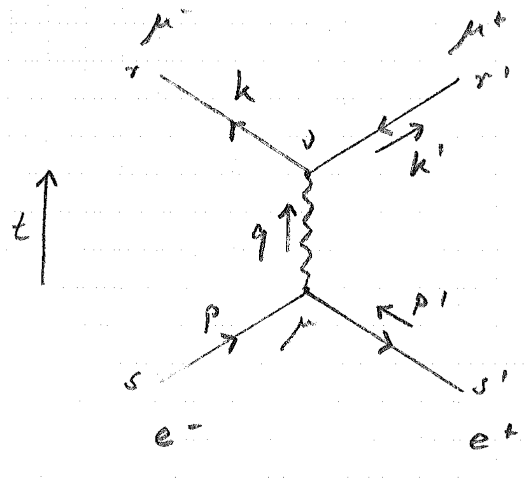


$$= \bar{u}^{s'}(\vec{p}_1{}')(-ie\gamma^\mu)\,u^s(\vec{p}_1)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}\right)$$
$$\times\, \bar{u}^{r'}(\vec{p}_2{}')(-ie\gamma^\nu)\,u^r(\vec{p}_2)$$

mit $q = p_1 - p_1' = p_2' - p_2$

$\Rightarrow$ $i\varepsilon$ kann weggelassen werden, solange $q^2 \neq 0$ (kinematisch nur möglich, wenn $q=0$ ⇝ uninteressant)

b) $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$



$$= \bar{v}^{s'}(\vec{p}\,')(-ie\gamma^\mu)\,u^s(\vec{p})\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)$$
$$\times\, \bar{u}^{r}(\vec{k})(-ie\gamma^\nu)\,v^{r'}(\vec{k}')$$

mit $q = p + p' = k + k'$

($\to q^2 \geq 4m_e^2 \neq 0$)

Sehr ähnliche Matrixelemente!

Werte im Folgenden b) aus (a) → Übung)

$$i\mathcal{M}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{ie^2}{q^2} \left(\bar{v}^{s'}(\vec{p}')\gamma^\mu u^s(\vec{p})\right)\left(\bar{u}^r(\vec{k})\gamma_\mu v^{r'}(\vec{k}')\right)$$
$$=: \frac{ie^2}{q^2} j^\mu J_\mu$$

$$\Rightarrow |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4}(j^\mu J_\mu)(j^\nu J_\nu)^* = \frac{e^4}{q^4} j^\mu j^{\nu *} J_\mu J_\nu^*$$

$$j^{\nu *} = (\bar{v}\gamma^\nu u)^* = (v^\dagger \gamma^0 \gamma^\nu u)^\dagger$$
$$= u^\dagger \gamma^{\nu\dagger} \gamma^{0\dagger} v$$
$$= \bar{u} \underbrace{\gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0}_{=\gamma^\nu} v = \bar{u}\gamma^\nu v$$

$$J_\nu^* = \bar{v}\gamma_\nu u$$

$$\Rightarrow |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4}\left(\bar{v}^{s'}(\vec{p}')\gamma^\mu u^s(\vec{p})\, \bar{u}^s(\vec{p})\gamma^\nu v^{s'}(\vec{p}')\right)$$
$$\cdot \left(\bar{u}^r(\vec{k})\gamma_\mu v^{r'}(\vec{k}')\, \bar{v}^{r'}(\vec{k}')\gamma_\nu u^r(\vec{k})\right)$$

- unpolarisierte einlaufende Teilchen
  $\Rightarrow$ Mittelung über s und s'

- keine Spin-Messung im Ausgangskanal
  $\Rightarrow$ Summation über r und r'

$$\Rightarrow |\mathcal{M}|^2_{\text{unpol}} = \frac{1}{2}\sum_s \frac{1}{2}\sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} |\mathcal{M}|^2$$

Erinnerung: $\sum_s u^s(\vec{p})\bar{u}^s(\vec{p}) = \not{p} + m$

$\sum_s v^s(\vec{p})\bar{v}^s(\vec{p}) = \not{p} - m$

$$\leadsto \sum_{s,s'} \bar{v}^{s'}_a(p') \gamma^\mu_{ab} u^s_b(p) \bar{u}^s_c(p) \gamma^\nu_{cd} v^{s'}_d(p')$$

$$= (\not{p}'-m)_{da} \gamma^\mu_{ab} (\not{p}+m)_{bc} \gamma^\nu_{cd} \qquad = \mathrm{tr}\left[(\not{p}'-m)\gamma^\mu(\not{p}+m)\gamma^\nu\right]$$

$$\Rightarrow \quad |\mathcal{M}|^2_{\text{unpol}} = \frac{e^4}{4q^4}\, \mathrm{tr}\left[(\not{p}'-m_e)\gamma^\mu(\not{p}+m_e)\gamma^\nu\right] \cdot \mathrm{tr}\left[(\not{k}+m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}'-m_\mu)\gamma_\nu\right]$$

Der Ausdruck enthält keine Spinoren mehr!

<u>Regeln zur Auswertung der Spuren über γ-Matrizen:</u>

- $\mathrm{tr}[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}] = 0$ für n ungerade
- $\mathrm{tr}\, \mathbb{1}_{4\times4} = 4$
- $\mathrm{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$
- $\mathrm{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$
- $\mathrm{tr}[\gamma_5] = 0$
- $\mathrm{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5] = 0$
- $\mathrm{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5] = -4i\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ (mit $\varepsilon^{0123} = +1$)
- $\mathrm{tr}[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}] = \mathrm{tr}[\gamma^{\mu_n}\gamma^{\mu_{n-1}}\ldots\gamma^{\mu_1}]$

z.B. $\mathrm{tr}[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}]$

$$= \mathrm{tr}[\underbrace{\gamma_5\gamma_5}_{=\mathbb{1}}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}] = (-1)^n\, \mathrm{tr}[\gamma_5\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}\gamma_5], \quad \text{da } \gamma_5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma_5$$

$$= (-1)^n\, \mathrm{tr}[\gamma_5\gamma_5\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}] \quad \text{(zykl. Vert. unter der Spur)}$$

$$= (-1)^n\, \mathrm{tr}[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}]$$

$$\Rightarrow \quad = 0, \text{ falls } n \text{ ungerade}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}\left[(\not p' - m_e)\gamma^\mu(\not p + m_e)\gamma^\nu\right]$$

$$= \underbrace{\operatorname{tr}\left[\not p'\gamma^\mu \not p \gamma^\nu\right]} - m_e^2 \operatorname{tr}\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right]$$

$$= p'_\alpha p_\beta \operatorname{tr}\left[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu\right]$$

$$= 4\left(p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu}(p'\cdot p + m_e^2)\right)$$

$$\operatorname{tr}\left[(\not k + m_\mu)\gamma_\mu(\not k' - m_\mu)\gamma_\nu\right]$$

$$= 4\left(k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}(k\cdot k' + m_\mu^2)\right)$$

$$\Rightarrow |\mathcal{M}|^2_{unpol} = \frac{8e^4}{q^4}\left[p\cdot k\, p'\cdot k' + p\cdot k'\, p'\cdot k + m_\mu^2\, p\cdot p' + m_e^2\, k\cdot k' + 2 m_e^2 m_\mu^2\right]$$

$m_\mu = 105{,}7\ \text{MeV}$, $m_e = 511\ \text{keV}$

↑ kann bei Energien, die zur Erzeugung von Myonen erforderlich sind, vernachlässigt werden.

außerdem:

$$p + p' = k + k' = q$$

$$\Rightarrow \bullet\ q^2 = (p+p')^2 = 2m_e^2 + 2p\cdot p' \approx 2p\cdot p' \Rightarrow p\cdot p' \approx \frac{q^2}{2}$$

$$\bullet\ (p'-k')^2 = (k-p)^2$$

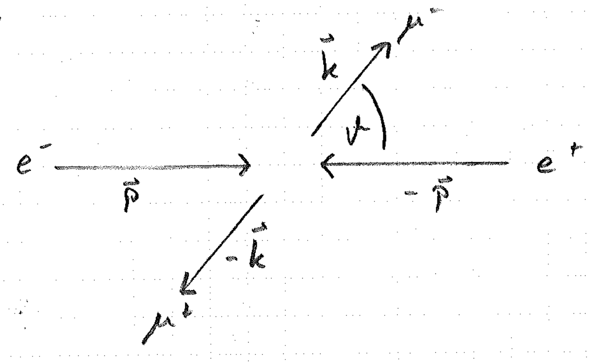
$$= m_e^2 + m_\mu^2 - 2k'\cdot p' = m_e^2 + m_\mu^2 - 2p\cdot k \qquad \Rightarrow p'\cdot k' = p\cdot k$$

$$\bullet\ (p-k')^2 = (k-p')^2 \qquad \Rightarrow p\cdot k' = p'\cdot k$$

$$\Rightarrow |\mathcal{M}|^2_{unpol} \approx \frac{8e^4}{q^4}\left[(p\cdot k)^2 + (p'\cdot k)^2 + \frac{1}{2} m_\mu^2 q^2\right]$$

weitere Auswertung im CMS:

$$p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad p' = \begin{pmatrix} E \\ -\vec{p} \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} E \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad k' = \begin{pmatrix} E \\ -\vec{k} \end{pmatrix}$$



$$E = |\vec{p}| = \sqrt{m_\mu^2 + \vec{k}^2}$$
$$\Rightarrow |\vec{k}| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$$

$$\Rightarrow \quad q^2 = (p+p')^2 = 4E^2$$
$$p\cdot k = E^2 - \vec{p}\cdot\vec{k} = E^2 - E|\vec{k}|\cos\vartheta$$
$$p'\cdot k = E^2 + \vec{p}\cdot\vec{k} = E^2 + E|\vec{k}|\cos\vartheta$$

$$\Rightarrow |\mathcal{M}|^2_{\text{unpol}} = \frac{8e^4}{16E^4}\left[E^2(E-\vec{k}\cos\vartheta)^2 + E^2(E+\vec{k}\cos\vartheta)^2 + 2m_\mu^2E^2\right]$$
$$= \frac{e^4}{2E^4}\left[2E^4 + 2E^2\vec{k}^2\cos^2\vartheta + 2m_\mu^2E^2\right]$$
$$= \frac{e^4}{2E^4}\left[2E^4 + 2(E^4 - E^2m_\mu^2)\cos^2\vartheta + 2E^2m_\mu^2\right]$$
$$= e^4\left[\left(1+\frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\vartheta\right]$$

2. <u>Wirkungsquerschnitt</u>: $\quad |\vec{v}_A - \vec{v}_B| = \left|\frac{\vec{p}}{E} + \frac{\vec{p}}{E}\right| = 2, \quad E_A = E_B = \frac{E_{CM}}{2} = E$

(V-25)
$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{8E^2}\frac{|\vec{k}|}{32\pi^2E}|\mathcal{M}|^2_{\text{unpol}}$$
$$= \frac{\alpha^2}{16E^2}\sqrt{1-\frac{m_\mu^2}{E^2}}\left[\left(1+\frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\vartheta\right]$$

mit $\alpha := \frac{e^2}{4\pi}$ „Feinstrukturkonstante“

2) totaler WQ:

$$\sigma = \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \, \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$= \frac{2\pi\alpha^2}{16E^2}\sqrt{1-\frac{m_\mu^2}{E^2}}\left[\left(1+\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cdot 2 + \left(1-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cdot\frac{2}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-} = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2}\sqrt{1-\frac{m_\mu^2}{E^2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{m_\mu^2}{E^2}\right]}$$

<u>Hochenergie-Limes:</u> $E \gg m_\mu$

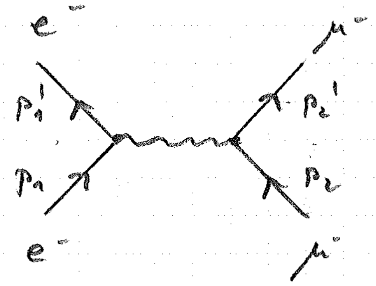
$$\Rightarrow \sigma = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\right) = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{CM}^2}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\right)$$

- E_{CM} = einzige dimensionsbehaftete Größe im Hochenergie-Limes $\Rightarrow \sigma \sim \frac{1}{E_{CM}^2}$ ✓
- Störungstheorie niedrigster Ordnung $\Rightarrow \sigma \sim |e^2|^2 \sim \alpha^2$ ✓

<u>Allgemeines Rezept zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten</u>

1. Zeichne Feynman-Diagramme zur gewünschten Ordnung.
2. Übersetze die Diagramme mit Feynman-Regeln in $\mathcal{M}$.
3. Berechne $|\mathcal{M}|^2$ und summiere bzw. mittele über Spins.
4. Berechne Spuren.
5. Wähle ein Koordinatensystem und spezifiziere die Kinematik.
6. Setze $|\mathcal{M}|^2_{\text{unpol.}}$ in die Formel für Wirkungsquerschnitte ein und integriere über den Phasenraum.

noch einmal zurück zu $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$:

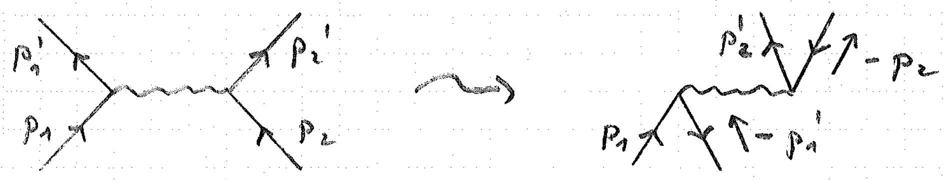


explizite Rechnung (→ Übung):

$$|\mathcal{M}_{e^-\mu^-\to e^-\mu^-}(p_1, p_2, p_1', p_2')|^2_{\text{unpol}}$$

$$= |\mathcal{M}_{e^-e^+\to \mu^-\mu^+}(p = p_1,\ p' = -p_1',\ k = p_2',\ k' = -p_2)|^2_{\text{unpol}}$$

anschaulich: „Umklappen" externer Linien



allgemeines Theorem:

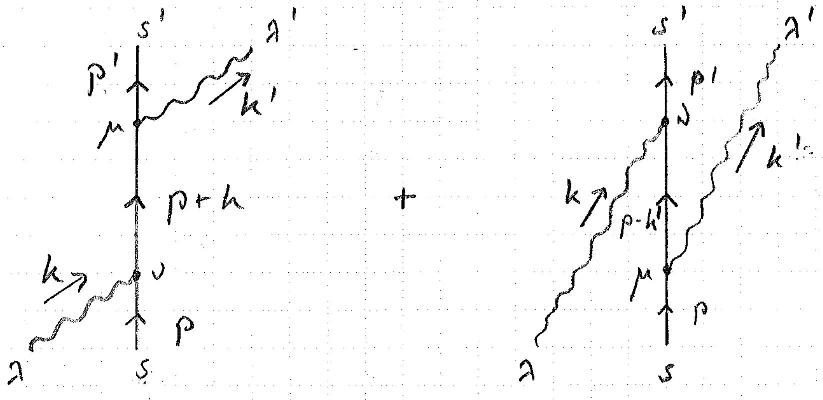
$$\boxed{\mathcal{M}\left(\phi(p) + \{X\} \to \{Y\}\right) = \mathcal{M}\left(\{X\} \to \{Y\} + \bar{\phi}(-p)\right)}$$

(bis auf irr. Phasenfaktoren)

$\bar{\phi}$ = Antiteilchen von ϕ

„Crossing-Symmetrie"

VI. 2 Compton-Streuung ($e^- \gamma \to e^- \gamma$)



$$\Rightarrow \quad i\mathcal{M} = \varepsilon^*_{\lambda'\mu}(\vec{k}')\,\bar{u}^{s'}(\vec{p}')\Big[(-ie\gamma^\mu)\, iS_F(p+k)\,(-ie\gamma^\nu) + (-ie\gamma^\nu)\, iS_F(p-k')\,(-ie\gamma^\mu)\Big]\, u^s(\vec{p})\,\varepsilon_{\lambda\nu}(\vec{k})$$