V. Wechselwirkende Felder und Feynman-Diagramme

V.1 Wechselwirkungen

freie Felder: Fourier-Moden entkoppeln
$\leftrightarrow$ unabh. „harmonische Oszillatoren"
für jeden Impuls
$\leftrightarrow$ lineare Bewegungsgleichungen

Wechselwirkungen: koppeln verschiedene Moden
(und die zugehörigen Teilchen)
$\Leftrightarrow$ Streuprozesse, Teilchenerzeugung und -vernichtung
$\leftrightarrow$ nichtlineare Bewegungsgleichungen
$\leftrightarrow$ Zusatzterme $\mathcal{L}_{WW}$ ($\leftrightarrow \mathcal{H}_{WW}$)

Kausalität: nur „lokale" WW-Terme

- $[\phi(x)]^n$ erlaubt
- $\phi(x)\,\phi(y)$ nicht erlaubt
- 1. Ableitungsterme, z.B. $A^\mu \phi \partial_\mu \phi$ erlaubt, werden aber in dieser Vorlesung nicht betrachtet

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}_{WW} = -\mathcal{L}_{WW}$$

1. Beispiel: ϕ^4-Theorie

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2}_{\text{freie KG-Lagrange-D.}} \underbrace{- \frac{\lambda}{4!}\phi^4}_{\mathcal{L}_{WW}}$$

- λ = „Kopplungskonstante"

Dimension?

$$[\mathcal{L}] = \left[\frac{E}{V}\right] = [E^4] = \mathrm{MeV}^4 = [m^2\phi^2] = [\lambda\phi^4]$$

$\Rightarrow$ $[\phi] = \mathrm{MeV}$

$\Rightarrow$ $[\lambda] = 1$ dimensionslos

- Bewegungsgleichung: $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = \underbrace{-\frac{\lambda}{3!}\phi^3}_{\frac{\partial\mathcal{L}_{WW}}{\partial\phi}}$

- keine zusätzlichen Ableitungen $\Rightarrow$ $\pi(x) = \dot\phi(x)$ (wie zuvor)

- Quantisierung unverändert: $[\phi(\vec x), \pi(\vec y)] = i\delta^3(\vec x - \vec y)$ etc.
  (gilt auch bei Ableitungskopplungen, dann jedoch mit dem entsprechend veränderten $\pi(\vec y)$).

- einfachstes Beispiel einer wechselwirkenden QFT,
  Anwendung: Higgs-Selbst-WW

<u>2. Beispiel:</u> Quanten-Elektrodynamik

$$\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{\bar\psi(i\partial\!\!\!/ - m)\psi}_{\text{freies Elektron}} \underbrace{- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{freies Photon}} \underbrace{- e\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\text{Elektron-Photon-WW}}$$

- $\mathcal{L}_{QED}$ ist (wie $\mathcal{L}_{Dirac}$) invariant unter der <u>globalen</u> (= x-unabhängigen) Phasentransformation $\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x)$

  $\Rightarrow$ erhaltener Noether-Strom: $j^\mu_{\text{Teilchen}} = \bar\psi\gamma^\mu\psi$

  ($\Leftrightarrow$ erhaltene Zahl Elektronen minus Positronen, vgl. S. III.30)

$\Rightarrow \mathcal{L}_{WW} = -e\, j^{\mu}_{\text{Teilchen}} A_\mu \equiv -j^{\mu}_{\text{Ladung}} A_\mu$ (vgl. Maxwell-Theorie s. IV.c)

$\Rightarrow$ „Kopplungskonstante" $e = -|e|$ = Elektron-Ladung (dimensionslos)

- $\mathcal{L}_{QED}$ ist invariant unter einer <u>lokalen</u> (= x-abhängigen) Phasentransformation, wenn man gleichzeitig eine Eichtransformation des Photonfeldes durchführt:

$$\boxed{\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x), \qquad A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)}$$

(→ Übung)

→ Die QED ist eine <u>Eichtheorie</u>, die man dadurch motivieren kann, dass man eine globale Symmetrie der freien Dirac-Theorie durch Hinzufügen eines „Eichfeldes" A_μ zu einer lokalen Symmetrie macht („eicht").

$\hookrightarrow$ „kovariante Ableitung" $D_\mu := \partial_\mu + ie A_\mu$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{QED} = \bar\psi (i \not{D} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

- Bewegungsgleichungen:

$$(i\not{D} - m)\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (i\not{\partial} - m)\psi = e \not{A}\psi$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar\psi\gamma^\nu\psi$$

Allgemein sind zunächst unendlich viele WW-Terme vorstellbar.
Einschränkung im Standard-Modell:
fundamentale Theorien sollten <u>renormierbar</u> sein.

stark vereinfachte Idee:

- störungstheoret. Entwicklung einer Amplitude M in der Kopplungskonstanten λ:

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} M^{(n)} \lambda^n = M^{(0)} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{M}^{(n)} \lambda^n}_{\text{dimensionslos}} , \quad \tilde{M}^{(n)} = \frac{M^{(n)}}{M^{(0)}}$$

- Die höheren Ordnungen ($n \geq 2$) enthalten häufig divergente Impulsintegrale
  $\Rightarrow$ • Regularisierung durch „Cutoff" Λ: $\int_0^\infty dp \to \int_0^\Lambda dp$

  • Berechnung von Observablen $O(\Lambda)$

  • am Ende $\lim_{\Lambda\to\infty} O(\Lambda)$

  Das sollte besser endlich bleiben!

- Annahme: $[\lambda] = (\mathrm{MeV})^m$, $m = -|m| < 0$

$$\Rightarrow [\tilde{M}^{(n)}] = \mathrm{MeV}^{-nm} \leadsto \tilde{M}^{(n)} \sim \Lambda^{-nm} = \Lambda^{n|m|}$$

$\Rightarrow$ immer schlimmere Divergenzen mit wachsender Ordnung

$$\Rightarrow [\lambda] = (\mathrm{MeV})^m , \quad m \overset{!}{\geq} 0$$

d.h. die Kopplung darf keine negative Energie-Dimension haben.

- Klein-Gordon-Feld : $[\phi] = \text{MeV}$
- Dirac-Feld : $[\psi] = \text{MeV}^{3/2}$ $\quad (\underset{\frac{3}{2}}{\bar\psi} \, (i \underset{1}{\partial} - m) \, \psi \quad \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 4 \checkmark)$
- Elm. Feld : $[A^\mu] = \text{MeV}$

$\mathcal{L}_{WW}$	$[\lambda]$	renormierbar?	
$\lambda\phi^3$	MeV	ja	
$\lambda\phi^4$	1	ja	
$\lambda\phi^5$	MeV^{-1}	nein	
$\lambda\bar\psi\psi$	MeV	ja	($\hat{=}$ Massenterm, keine WW)
$\lambda\psi^3$	$\text{MeV}^{-1/2}$	nein	(und nicht Lorentz-invar.)
$\lambda(\bar\psi\psi)^2$	MeV^{-2}	nein	
$\lambda\bar\psi \not{A} \psi$	1	ja	(→ QED)
$\lambda A^2 \partial_\mu A^\mu$	1	ja	(→ QCD) 
λA^4	1	ja	(→ QCD) 
$\lambda\bar\psi\psi\phi$	1	ja	(→ Yukawa-Theorie)
$A^\mu \phi \partial_\mu \phi$	1	ja	(→ skalare Elektrodynamik)
$\phi^2 A^2$	1	ja	(" ")

Dies sind alle Möglichkeiten!

→ Die Forderung nach Renormierbarkeit schränkt die Zahl der möglichen Wechselwirkungsterme stark ein.

V.2 Störungstheoretische Entwicklung von Korrelationsfunktionen

Wechselwirkende QFT nicht mehr exakt lösbar.
→ einfachste Methode: Störungstheorie bei kleinen Kopplungen

Ziel: Berechnung von Wirkungsquerschnitten und Zerfallsraten.

erster Schritt:
Korrelationsfunktion: $\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$
in ϕ^4-Theorie

$|\Omega\rangle$ = Grundzustand der wechselwirkenden Theorie
$\neq$ $|0\rangle$ = " " freien "

freie Theorie:

$$\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip\cdot(x-y)}$$

ϕ^4-Theorie:

$$H = H_0 + H_{ww} = H_{KG} + \int d^3x \, \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

Auswirkungen von H_{ww}:

i) andere Zeitentwicklung $\phi(x) = e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt}$

ii) $|\Omega\rangle \neq |0\rangle$

Ziel: störungstheoret. Entwicklung beider Effekte

i) $\phi(x)$

feste Zeit t_0 : (bisher meistens $t_0 = 0$)

$$\phi(t_0, \vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

(erfüllt wie zuvor die Quantisierungsregeln)

$$\Rightarrow \phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)}\, \phi(t_0, \vec{x})\, e^{-iH(t-t_0)}$$

Definiere: „Wechselwirkungsbild - Feldoperator"

(WW - Bild: Zeitentw. der Operatoren mit H_0
" " Zustände " H_{ww})

$$\phi_I(t, \vec{x}) := \phi(t, \vec{x})\Big|_{\lambda = 0}$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)}\, \phi(t_0, \vec{x})\, e^{-iH_0(t-t_0)}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} \right)\Big|_{x^0 = t - t_0}$$

$\Rightarrow$ ϕ im Heisenberg-Bild: (wie zuvor)

$$\boxed{\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)}\, e^{-iH_0(t-t_0)}\, \phi_I(t, \vec{x})\, e^{iH_0(t-t_0)}\, e^{-iH(t-t_0)}}$$

$$\boxed{\equiv U^\dagger(t, t_0)\, \phi_I(t, \vec{x})\, U(t, t_0)}$$

mit $\boxed{U(t, t_0) := e^{iH_0(t-t_0)}\, e^{-iH(t-t_0)}}$ „Zeitentwicklungsoperator" (unitär)

$$\Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}\, (H - H_0)\, e^{-iH(t-t_0)}$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)}\, H_{ww}\, e^{-iH(t-t_0)}$$

$$= \underbrace{e^{iH_0(t-t_0)}\, H_{ww}\, e^{-iH_0(t-t_0)}}_{=: H_I(t)}\, U(t, t_0)$$

(WW - Hamiltonop. im WW - Bild)

→ DGl: $i\frac{\partial}{\partial t} U(t,t_0) = H_I(t) U(t,t_0)$

mit $H_I = \int d^3x \, \frac{\lambda}{4!} \, \phi_I^4$

Anfangsbedingung: $U(t_0,t_0) = 1$

Lösung:

$$U(t,t_0) = 1 + (-i)\int_{t_0}^{t} dt_1 \, H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \, H_I(t_1) H_I(t_2)$$

$$+ \dots$$

(Beweis: einfach nach t ableiten)

Die Operatoren $H_I(t_i)$ sind zeitgeordnet (für $t \geq t_0$)

2, $$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \, H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)$$

$$= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \dots \int_{t_0}^{t} dt_n \; T\{H_I(t_1) \dots H_I(t_n)\} = T \frac{1}{n!} \Big(\int_{t_0}^{t} dt' H_I(t')\Big)^n$$

(z.B. $$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \; T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \, \{ H_I(t_1) H_I(t_2) \Theta(t_1 - t_2)$$

$$+ H_I(t_2) H_I(t_1) \Theta(t_2 - t_1) \}$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \; H_I(t_1) H_I(t_2) \Theta(t_1 - t_2)$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \; H_I(t_1) H_I(t_2)$$)

$$\Rightarrow \boxed{U(t,t_0) = T\left\{ \exp\left(-i\int_{t_0}^{t} dt'\, H_I(t')\right)\right\}} \qquad (t \geq t_0)$$

Störungstheorie n-ter Ordnung:
Nimm nur Terme bis Ordnung $H_I^n \sim \lambda^n$ mit.

Verallgemeinerung auf beliebige Anfangszeiten:

$$U(t,t') = T\left\{ \exp\left(-i\int_{t'}^{t} dt''\, H_I(t'')\right)\right\} \quad , \quad t \geq t'$$

$$2) \quad \boxed{U(t,t') = e^{iH_0(t-t_0)}\, e^{-iH(t-t')}\, e^{-iH_0(t'-t_0)}}$$

$$U(t_1,t_2)\, U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3) \quad , \quad t_1 \geq t_2 \geq t_3$$

$$U(t_1,t_3)\, U^{\dagger}(t_2,t_3) = U(t_1,t_2) \quad , \quad \text{"}$$

(→ Übung)

ii) $|\Omega\rangle$

Annahme: WW kleine Störung $\Rightarrow \langle 0|\Omega\rangle \neq 0$

$$\Rightarrow e^{-iH\tau}|0\rangle = \sum_n e^{-iE_n\tau}|n\rangle\langle n|0\rangle$$

$$= e^{-iE_0\tau}|\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n\neq 0} e^{-iE_n\tau}|n\rangle\langle n|0\rangle$$

$$\Rightarrow \left(e^{-iE_0\tau}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1} e^{-iH\tau}|0\rangle$$

$$= |\Omega\rangle + \sum_{n\neq 0} e^{-i(E_n-E_0)\tau}\frac{\langle n|0\rangle}{\langle\Omega|0\rangle}|n\rangle$$

Energie-Eigenwerte:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

$$H|\Omega\rangle = E_0|\Omega\rangle$$

$$H_0|0\rangle = 0$$

$|\Omega\rangle$ Grundzustand $\Rightarrow$ $E_n > E_0$ $\forall n \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} e^{-i(E_n - E_0)\tau} = 0 \qquad \left(\lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} f(\tau) := \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{T \to \infty} f((1-i\varepsilon)T) \right)$$

$$\Rightarrow |\Omega\rangle = \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \left(e^{-iE_0\tau} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} e^{-iH\tau} |0\rangle$$

Verschiebung von τ um eine Konstante t_0:

$$|\Omega\rangle = \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \left(e^{-iE_0(\tau + t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} e^{-iH(\tau + t_0)} |0\rangle$$

Definiere Energie des ungestörten Grundzustands $H_0 |0\rangle = 0$

$$\Rightarrow e^{-iH_0 t} |0\rangle = |0\rangle \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow |\Omega\rangle = \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} (\ldots)^{-1} \underbrace{e^{-iH(t_0 + \tau)} e^{-iH_0(-\tau - t_0)}}_{U(t_0, -\tau)} |0\rangle$$

analog

$$\langle \Omega | = \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \langle 0 | U(\tau, t_0) \left(e^{-iE_0(\tau - t_0)} \langle 0 | \Omega \rangle \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow 1 = \langle \Omega | \Omega \rangle$$

$$= \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \left(e^{-2iE_0\tau} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2 \right)^{-1} \langle 0 | \underbrace{U(\tau, t_0)\, U(t_0, -\tau)}_{U(\tau, -\tau)} |0\rangle$$

- Sei nun $x^0 > y^0 > t_0$

$$\Rightarrow \langle \Omega | \phi(x)\, \phi(y) | \Omega \rangle$$

$$= \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \left(e^{-2iE_0\tau} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2 \right)^{-1}$$

$$* \langle 0 | U(\tau, t_0)\, U^\dagger(x^0, t_0)\, \phi_I(x)\, U(x^0, t_0)$$

$$* \quad U^\dagger(y^0, t_0)\, \phi_I(y)\, U(y^0, t_0)\, U(t_0, -\tau) | 0 \rangle$$

$$= \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \frac{\langle 0 | U(\tau, x^0)\, \phi_I(x)\, U(x^0, y^0)\, \phi_I(y)\, U(y^0, -\tau) | 0 \rangle}{\langle 0 | U(\tau, -\tau) | 0 \rangle}$$

- t_0 tritt nicht mehr auf
- alle Größen zeitgeordnet

- $y^0 > x^0 \Rightarrow \langle \Omega | T\{\phi(x)\, \phi(y)\} | \Omega \rangle = \langle \Omega | \phi(y)\, \phi(x) | \Omega \rangle$
  $= \ldots$ (analog)

2) Gesamtergebnis:

$$\boxed{\langle \Omega | T\{\phi(x)\phi(y)\} | \Omega \rangle = \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \frac{\langle 0 | T\{ \phi_I(x)\, \phi_I(y)\, \exp(-i \int_{-\tau}^{\tau} dt\, H_I(t))\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T\{\exp(-i \int_{-\tau}^{\tau} dt\, H_I(t))\} | 0 \rangle}}$$

- gilt analog für höhere Korrelationfunktionen mit beliebig vielen Feldern

- exakte Formel, Ausgangspunkt für Störungsrechnung

V.3 Das Wick'sche Theorem

Ziel: möglichst einfache Berechnung von Ausdrücken der Form

$$\langle 0 | T\{ \phi_I(x_1) \ldots \phi_I(x_n) \} | 0 \rangle$$

Notation: ab jetzt alle Felder im WW-Bild
→ lasse Index I weg

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec p}\, e^{-ip\cdot x} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec p}^\dagger\, e^{ip\cdot x}$$

$$\Rightarrow \phi^{(+)}(x)|0\rangle = 0 = \langle 0|\phi^{(-)}(x)$$

$$\phi(x)\phi(y) = \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y)$$

$$= \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) + [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)]$$

$$\equiv N\{\phi(x)\phi(y)\} + [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)]$$

„normal-geordnetes Produkt":
Alle Erzeuger stehen links von den Vernichtern.

z.B. $N(a_{\vec p}\, a_{\vec k}^\dagger\, a_{\vec q}) \equiv\, : a_{\vec p}\, a_{\vec k}^\dagger\, a_{\vec q} : \;=\; a_{\vec k}^\dagger\, a_{\vec p}\, a_{\vec q}$

$\Rightarrow \langle 0 | N(\ldots) | 0\rangle = 0$, sofern $(\ldots)$ keine Terme ohne Operatoren enthält

analog:

$$\phi(y)\phi(x) = N\{\phi(y)\phi(x)\} + [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)]$$
$$= N\{\phi(x)\phi(y)\} + [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T\{\phi(x)\,\phi(y)\} = N\{\phi(x)\,\phi(y)\} + \contraction{}{\phi}{(x)\,}{\phi}\phi(x)\,\phi(y)}$$

mit

$$\contraction{}{\phi}{(x)\,}{\phi}\phi(x)\,\phi(y) := \begin{cases} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] & \text{für } x^0 > y^0 \\ [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)] & \text{" } y^0 > x^0 \end{cases} \qquad (\text{„Kontraktion"})$$

Es gilt:

$$\contraction{}{\phi}{(x)}{\phi}\phi(x)\phi(y) = D_F(x-y) \qquad (\rightsquigarrow \text{Übung})$$

$$\Big(\Rightarrow \langle 0|T\{\phi(x), \phi(y)\}|0\rangle = \underbrace{\langle 0|N\{\phi(x)\,\phi(y)\}|0\rangle}_{=0} + D_F(x-y)\,\langle 0|0\rangle$$

$$= D_F(x-y) \quad \checkmark \Big)$$

Verallgemeinerung: „Wick'sches Theorem"

$$\boxed{\begin{aligned} &T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\} \\ &= N\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n) + \text{alle möglichen Kontraktionen}\} \end{aligned}}$$

<u>Beispiel:</u> vier unterschiedliche Punkte $x_1, \dots, x_4$; $\phi_i \equiv \phi(x_i)$

$$\Rightarrow T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} = N\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4$$

$$+ \contraction{}{\phi_1}{}{\phi_2}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{}{\phi_1}{\phi_2}{\phi_3}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{}{\phi_1}{\phi_2\phi_3}{\phi_4}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4$$

$$+ \contraction{\phi_1}{\phi_2}{}{\phi_3}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{\phi_1}{\phi_2}{\phi_3}{\phi_4}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{\phi_1\phi_2}{\phi_3}{}{\phi_4}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4$$

$$+ \contraction{}{\phi_1}{}{\phi_2}\contraction{\phi_1\phi_2}{\phi_3}{}{\phi_4}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{}{\phi_1}{\phi_2}{\phi_3}\contraction[2ex]{\phi_1}{\phi_2}{\phi_3}{\phi_4}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{}{\phi_1}{\phi_2\phi_3}{\phi_4}\contraction[0.5ex]{\phi_1}{\phi_2}{}{\phi_3}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}$$

wobei z.B.

$$N\{\contraction{}{\phi_1}{\phi_2}{\phi_3}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} = D_F(x_1-x_3)\,N\{\phi_2\phi_4\}$$

Beweis des Wick'schen Theorems:
über vollständige Induktion (n=2 ✓ zeige: n ⇒ n+1)

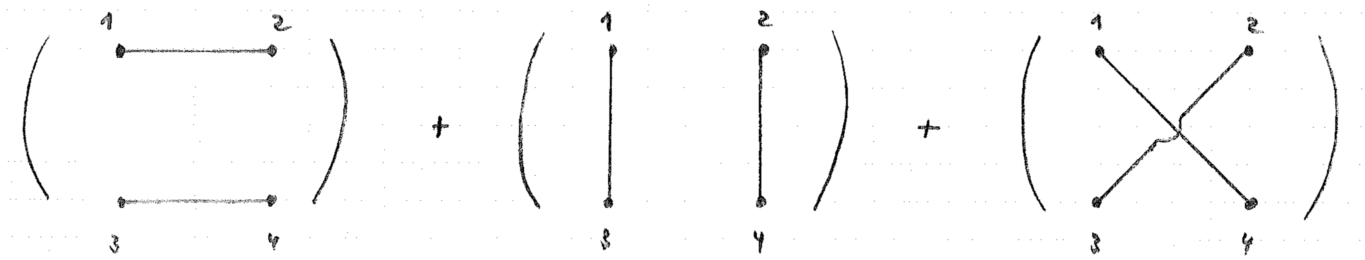
V. 4 Feynman-Diagramme

Aus dem obigen Beispiel folgt:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1)\, \phi(x_2)\, \phi(x_3)\, \phi(x_4) \} | 0 \rangle$$

$$= D_F(x_1 - x_2)\, D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3)\, D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4)\, D_F(x_2 - x_3)$$

$\hat{=}$



interessanteres Beispiel:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x)\, \phi(y)\, \exp\left(-i \int dt\, H_I(t)\right) \} | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T \{ \phi(x)\phi(y) + \phi(x)\phi(y)\left[-i \int dt\, H_I(t)\right] + \ldots \} | 0 \rangle$$

$D_F(x-y)$
(= freier Propagator)

1. Ordnung Störungstheorie

ϕ^4-Theorie:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x)\, \phi(y) \left[-i \int dt\, H_I(t)\right] \} | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T \{ \phi(x)\, \phi(y)\, (-i) \int d^4z\, \frac{\lambda}{4!}\, \phi^4(z) \} | 0 \rangle$$

$$= \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z \, \langle 0 | T\{ \phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z) \} | 0 \rangle$$

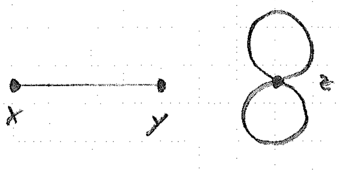
$$= \phi(x)\phi(y)\,\phi(z)\phi(z)\,\phi(z)\phi(z) \cdot 3$$

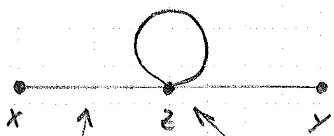
$$+ \phi(x)\phi(y)\,\phi(z)\phi(z)\,\phi(z)\phi(z) \cdot 4 \cdot 3$$

+ nicht vollständig kontrahierte Terme

$$= 3\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) D_F(x-y) \int d^4z \, D_F(z-z)\, D_F(z-z)$$

$$+ 12\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) \int d^4z \, D_F(x-z)\, D_F(y-z)\, D_F(z-z)$$

$\hat{=}$ (

) + 

⇝ „Kochrezept":

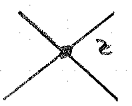
$$\langle 0 | T\{ \phi(x)\phi(y) \exp[-i \int dt\, H_I(t)] \} | 0 \rangle$$

= Summe aller Diagramme mit externen Punkten x und y

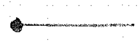
Feynman-Regeln zur Berechnung der Diagramme
(in ϕ^4-Theorie)

1. Für jeden Propagator 

$= D_F(x_1 - x_2)$

2. " " Vertex 

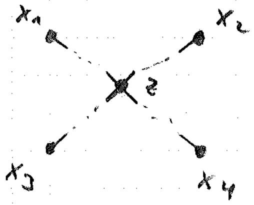
$= (-i\lambda) \int d^4z$

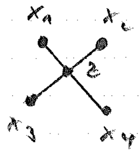
3. " " externen Punkt  $= 1$

4. Teile durch den Symmetriefaktor $S = \prod_i S_i$

<u>Symmetriefaktor:</u>

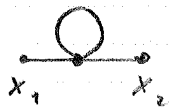
• Die Vertizes sind eigentlich jeweils mit einem Faktor $\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)\int d^4z$ verbunden. Andererseits gibt es z.B. $4!$ Möglichkeiten, einen Vertex mit vier verschiedenen Punkten zu verbinden:



→ Lasse beide Faktoren $4!$ weg und werte 

als <u>ein</u> Diagramm.

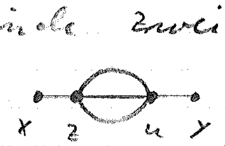
Es gibt jedoch Ausnahmen.

<u>Bsp. 1:</u> Verbinde $\times$ mit zwei Punkten zu 

$\rightarrow$ $4 \cdot 3$ Möglichkeiten

$\Rightarrow$ Symmetriefaktor $S = \frac{4!}{3 \cdot 4} = 2$

allgemein: jeweils ein Faktor $S_i = 2$ für jede Linie, die am gleichen Punkt beginnt und endet

<u>Bsp. 2:</u> Verbinde zwei Vertizes mit zwei Punkten zu 

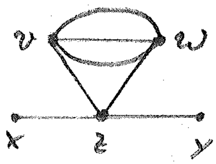
$\rightarrow$ $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ Möglichkeiten $\Rightarrow S = \frac{(4!)^2}{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6$

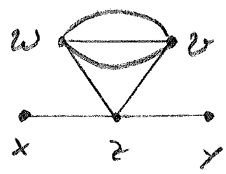
allgemein: jeweils ein Faktor $S_i = N!$, wenn N Linien die gleichen Punkte verbinden

- n-te Ordnung Störungstheorie
  - Faktor $\frac{1}{n!}$ von der Exponentialfkt.
  - $n!$ Anordnungen der Vertizes, z.B. 

→ Lasse beide Faktoren weg und werte 

als ein Diagramm

aber: 

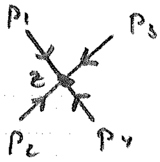
ist sowieso äquivalent zu 

⇒ Symmetriefaktor 2

allgemein: jeweils ein Faktor $S_i = N!$ für N äquivalente Vertizes

Impulsraum:

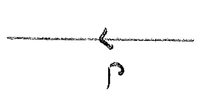
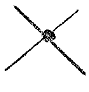
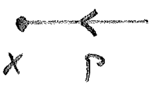
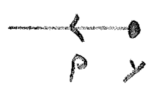
$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ip\cdot(x-y)}$$

⇒ 

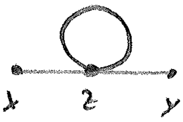
$\sim \int d^4z \, e^{-ip_1\cdot z} e^{-ip_2\cdot z} e^{-ip_3\cdot z} e^{-ip_4\cdot z} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4)$

Viererimpulserhaltg.!

→ Feynman-Regeln im Impulsraum:

1. Propagator:  $= \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}$
2. Vertex:  $= -i\lambda$
3 externe Punkte:  $= e^{-ip\cdot x}$,  $= e^{ip\cdot y}$
4. Viererimpulserhaltung an jedem Vertex
5. Integration über alle unbestimmten Impulse $\int \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}$
6. Teile durch den Symmetriefaktor

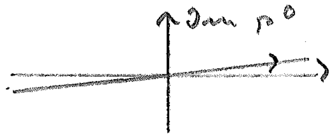
Was passiert mit dem $\lim\limits_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty}$?

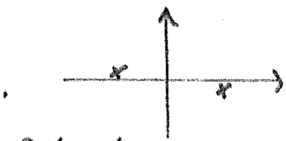
z. B.  $= \frac{1}{2}(-i\lambda) \lim\limits_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \int_{-\tau}^{\tau} dz^0 \int d^3z \; D_F(x-z)\, D_F(y-z)\, D_F(0)$

$$\sim \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \int_{-\tau}^{\tau} dz^0 \int d^3z \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\, e^{i(p_1+p_2)\cdot z} \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\eta} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\eta}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} e^{\pm i p_i^0 \tau} = \lim\limits_{T \to \infty} e^{\pm i p_i^0 T} e^{\pm p^0 \varepsilon T}$ divergiert an der oberen oder unteren Grenze

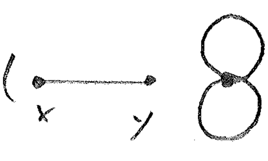
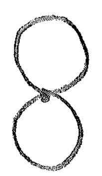
$\Rightarrow (1-i\varepsilon)p_i^0$ sollte besser reell sein!

$\Rightarrow$ Integriere  Re p^0 mit $p^0 \sim (1+i\varepsilon)$

- kompatibel mit der Feynman-Randbed. 

$\rightarrow$ Bei der Integration entlang der „gedrehten" p^0-Richtung könnte man das $i\eta$ im Propagator auch weglassen. In der Regel kann man dagegen auch das $i\eta$ im Propagator beibehalten und über reelle p^0 und z^0 integrieren.

<u>Unverbundene Diagrammteile:</u>

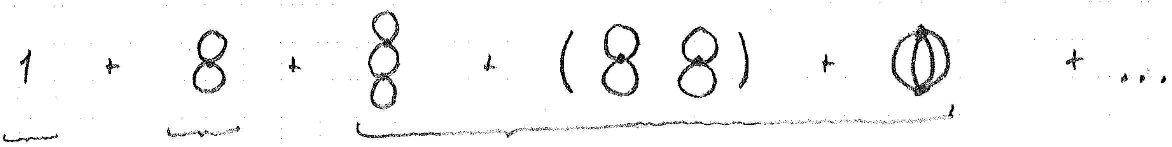
z. B. () $= D_F(x-y) \times$ 

 $= \frac{1}{S} \int d^4z\, D_F(0)(-i\lambda) D_F(0) = \frac{-i\lambda}{S} D_F^2(0) \underbrace{\int d^4z}_{V_4 \to \infty}$

Wir hatten (→ V·11)

$$\langle\Omega|T\{\phi\phi\}|\Omega\rangle = \lim_{T\to\dots} \frac{\langle 0|T\{\phi_I\phi_I\, e^{-i\int dt\, H_I}\}|0\rangle}{\langle 0|T\, e^{-i\int dt\, H_I}|0\rangle}$$

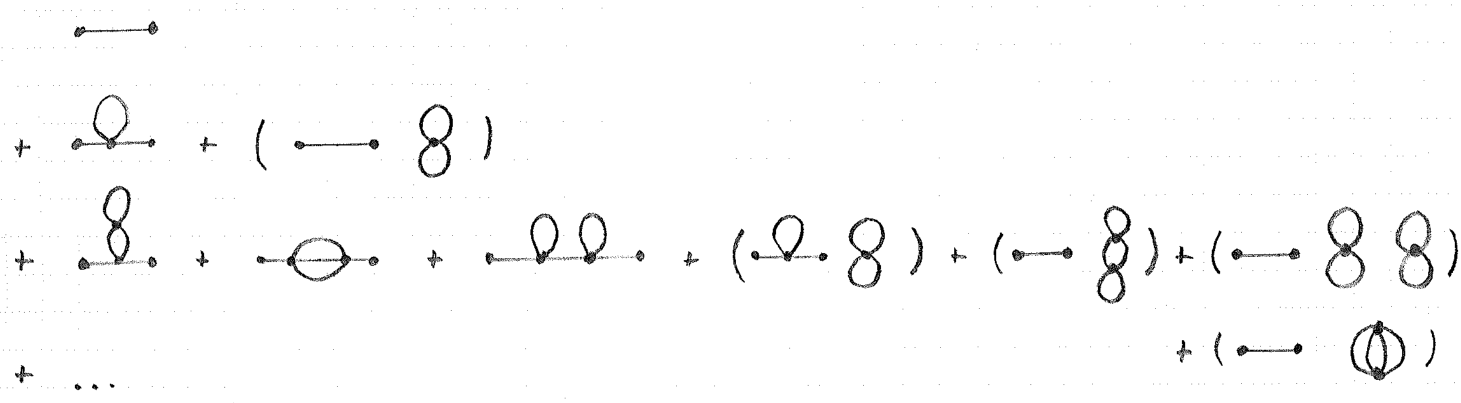
<u>Nenner:</u>

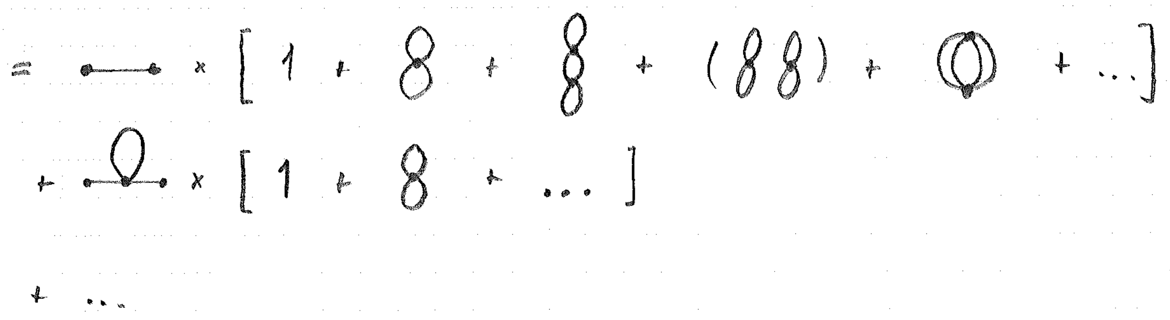


$O(\lambda^0)$ $O(\lambda)$ $O(\lambda^2)$

„Vakuumdiagramme",
„Vakuumblasen"

<u>Zähler:</u>





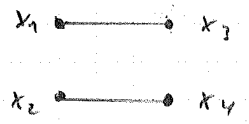
detaillierte Rechnung:
Die Vakuumdiagramme kürzen sich exakt heraus.

⇒ Nur die verbundenen Diagramme tragen bei.

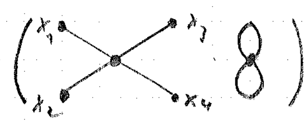
allgemein:

$$\boxed{\langle\Omega| T\{\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle = \sum \left(\begin{array}{c}\text{verbundene Feynmandiagramme}\\ \text{mit externen Punkten } x_1,\ldots,x_n\end{array}\right)}$$

(„verbunden" = keine Faktoren mit Vakuumblasen,
nicht notwendig untereinander verbunden:



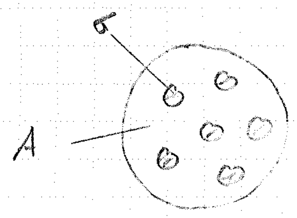
✓



nicht erlaubt)

V.5 Wirkungsquerschnitte

klassisch-anschauliches Bild des Wirkungsquerschnitts:



N_A Target-Teilchen jeweils mit Querschnittsfläche σ werden von N_B punktförmigen Projektilteilchen beschossen, die gleichmäßig über eine Fläche A verteilt sind.

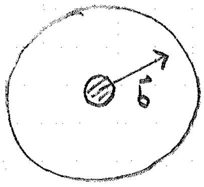
$\Rightarrow$ Zahl der Treffer: $N = \dfrac{N_A \sigma}{A} \cdot N_B$

Verallgemeinerte Definition:

Wirkungsquerschnitt $\quad \sigma = \dfrac{N\,A}{N_A\,N_B} \equiv \dfrac{N}{N_A\,n_B}$

N := Zahl der „interessanten Ereignisse"

$n_B = \dfrac{N_B}{A}$ = Flächendichte der Projektil-Teilchen nur ein Target-Teilchen im Zentrum des Strahls:



$N_A = 1$

$P(\vec{b})$ = Ereigniswahrscheinlichkeit für ein Projektilteilchen mit Stoßparameter $\vec{b}$

$$\Rightarrow \quad N = \int d^2b \; n_B \; P(\vec{b}) = n_B \int d^2b \; P(\vec{b}) \qquad (\text{für } n_B = \text{const.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \int d^2b \; P(\vec{b})} \qquad (N_A = 1, \; n_B = \text{const.})$$

QFT: Beschreibe ein- und auslaufende Teilchen durch Wellenpakete:

$$|\phi_i\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \, \phi_i(\vec{k}) \, |\vec{k}\rangle$$

; $|\vec{k}\rangle$ = Ein-Teilchen-Impuls-Zustand der wechselwirkenden Theorie

$\phi_i(\vec{k})$: Fouriertransf. der Ortswellenfkt.

(nicht-WW Theorie $|\vec{k}\rangle = \sqrt{2E_k}\, a_k^\dagger |0\rangle$)

Normierung:

$$\langle \phi_i | \phi_i \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \, |\phi_i(\vec{k})|^2 = 1$$

Betrachte Prozess $A + B \to 1 + 2 + \ldots + n$

Annahme:
Die ein- und auslaufenden Wellenpakete sind räumlich lokalisiert, so dass sie zur Zeit $-\infty$ bzw. $+\infty$ als unabhängige Ein-Teilchen-Zustände konstruiert werden können.

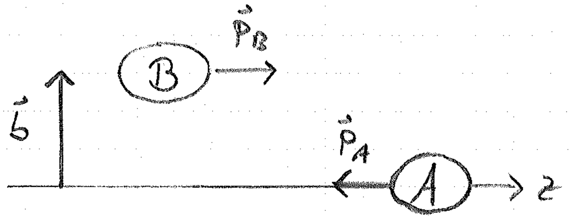
⇝ Übergangswahrscheinlichkeit:

$$P = \left| {}_{out}\langle \phi_1 \dots \phi_n \,|\, \phi_A \; \phi_B \rangle_{in} \right|^2$$

Endzustand, zur Zeit $t \to \infty$ gemessen — Anfangszustand, zur Zeit $t \to -\infty$ präpariert

$$|\phi_A \phi_B\rangle_{in} = \int \frac{d^3k_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_B}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_A 2E_B}} \phi_A(\vec{k}_A)\phi_B(\vec{k}_B) e^{-i\vec{b}\cdot\vec{k}_B} |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_{in}$$

Dabei seien $\phi_A(\vec{k}_A)$ und $\phi_B(\vec{k}_B)$ so gewählt, dass die Erwartungswerte der einlaufenden Impulse $\vec{p}_A = \langle \vec{k}_A \rangle$ und $\vec{p}_B = \langle \vec{k}_B \rangle$ parallel zur z-Richtung sind und die Erwartungswerte der Ortsraumwellenfunktion auf der z-Achse liegen. Der zusätzliche Faktor $e^{-i\vec{b}\cdot\vec{k}_B}$ verschiebt dann das Projektilwellenpaket in transversale Richtung



$${}_{out}\langle \phi_1 \dots \phi_n| = \frac{1}{\sqrt{2E_1 \dots 2E_n}} \, {}_{out}\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n|$$ („scharfe" Impulszustände)

⇝ diff. Übergangswahrscheinlichkeit:

$$dP = \prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \left| {}_{out}\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | \phi_A \; \phi_B \rangle_{in} \right|^2$$

2) diff WQ:

$$d\sigma = \int d^2b \, dP$$

$$= \int d^2b \left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f}\right)\left(\prod_{i=A,B} \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3k_i'}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\vec{k}_i')}{\sqrt{2E_i'}}\right)$$

$$* \, e^{i\vec{b}\cdot(\vec{k}_B'-\vec{k}_B)} {}_{out}\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_{in} \left({}_{out}\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | \vec{k}_A' \vec{k}_B' \rangle_{in}\right)^*$$

zentrales Objekt:

$${}_{out}\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_{in} \equiv \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | S | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle$$

Zust. mit def. Impulsen zur Zeit $t \to \infty$ ... $t \to -\infty$

Zustände mit def. Impulsen zu einer beliebigen gemeinsamen Referenz-Zeit

S-Matrix: unitärer Operator mit $S = \mathbb{1}$, falls $H_{ww} = 0$

$\Rightarrow \quad S = \mathbb{1} + iT \quad , \quad T$: „T-Matrix"

globale Viererimpulserhaltung:

$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | iT | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle = \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum_f p_f)}_{\text{Kinematik}} \, i \underbrace{\mathcal{M}(k_A, k_B \to p_1, \dots, p_n)}_{\text{Dynamik}}$$

- $\mathcal{M}$: „invariantes Matrixelement"
  - Lorentz-invariant
  - kann störungstheoretisch mit Hilfe von Feynman-Diagrammen berechnet werden (s.u.)

- alle externen Viererimpulse „on-shell": $p_i^0 = \sqrt{\vec{p}_i^{\,2} + m_i^2}$

nicht-triviale Prozesse (keine Vorwärtsstreuung):

$$\Rightarrow \quad {}_{out}\langle \vec p_1 \dots \vec p_n | \vec k_A \vec k_B \rangle_{in} \left({}_{out}\langle \vec p_1 \dots \vec p_n | \vec k_A' \vec k_B' \rangle_{in} \right)^*$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4 (k_A + k_B - \sum_f p_f)(2\pi)^4 \delta^4 (k_A' + k_B' - \underbrace{\sum_f p_f}_{= k_A + k_B}) \mathcal{M}(\{k_i\} \to \{p_f\}) \mathcal{M}^*(\{k_i'\} \to \{p_f\})$$

außerdem:

$$\int d^2 b \; e^{i \vec b \cdot (\vec k_B' - \vec k_B)} = (2\pi)^2 \delta^2 (\vec k_{B_\perp}' - \vec k_{B_\perp}) = (2\pi)^2 \delta(k_{B_x}' - k_{B_x}) \, \delta(k_{B_y}' - k_{B_y})$$

Ausführung der k_i'-Integrationen mit Hilfe der δ-Fktn.:
($\to$ Übung)

$$\Rightarrow \quad d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_B}{(2\pi)^3} \frac{|\phi_A(\vec k_A)|^2 \, |\phi_B(\vec k_B)|^2}{2E_A \, 2E_B \, |v_A - v_B|}$$
$$* \, |\mathcal{M}(k_A, k_B \to \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4 (k_A + k_B - \sum_f p_f)$$

mit $\quad v_i := \dfrac{k_{i z}}{E_i}$

Wellenpakete im Impulsraum scharf lokalisiert:

$$|\phi_i(\vec k_i)|^2 \approx (2\pi)^3 \delta^3 (\vec k_i - \vec p_i)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{ d\sigma = \underbrace{\frac{1}{2E_A \, 2E_B \, |\vec v_A - \vec v_B|}} \underbrace{\left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^4 (p_A + p_B - \sum_f p_f)} * \underbrace{|\mathcal{M}(p_A, p_B \to \{p_f\})|^2} }$$

transformiert sich wie eine Fläche ($\leftrightarrow$ Wirkungsquerschnitt)

Lorentz-invariantes Phasenraum-Element

„Physik"

$|\vec v_A - \vec v_B|$ = Relativgeschwindigkeit der einlaufenden Teilchen.
(kollinear: $\vec v_A \parallel \vec v_B$)

Spezialfall: $A + B \to 1 + 2$ im Schwerpunktsystem

$$p_A = \begin{pmatrix} E_A \\ \vec{p}_A \end{pmatrix}, \quad p_B = \begin{pmatrix} E_B \\ -\vec{p}_A \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_A + p_B = \begin{pmatrix} E_{CM} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

mit $E_A = \sqrt{\vec{p}_A^{\,2} + m_A^2}$, $E_B = \sqrt{\vec{p}_A^{\,2} + m_B^2}$, $E_{CM} = E_A + E_B$

$$\Rightarrow \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_1 - p_2)$$

$$= \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_1E_2} 2\pi\, \delta(E_{CM} - E_1 - E_2)$$

mit $E_1 = \sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_1^2}$
$E_2 = \sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_2^2}$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int |\vec{p}_1|^2 d|\vec{p}_1| d\Omega \frac{1}{E_1E_2} \delta(E_{CM} - E_1 - E_2)$$

$\to$ legt $|\vec{p}_1|$ fest

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int d\Omega \frac{|\vec{p}_1|^2}{E_1E_2} \frac{1}{\frac{|\vec{p}_1|}{E_1} + \frac{|\vec{p}_1|}{E_2}}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}_1|}{E_{CM}} \int d\Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CMS} = \frac{1}{2E_A 2E_B |\vec{v}_A - \vec{v}_B|} \frac{|\vec{p}_1|}{16\pi^2 E_{CM}} |\mathcal{M}(p_A, p_B \to p_1, p_2)|^2}$$

weiterer Spezialfall: gleiche Massen für alle Teilchen

$$\Rightarrow E_A = E_B, \quad E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad E_A = E_B = E_1 = E_2 = \tfrac{1}{2} E_{CM}$$

$$\Rightarrow |\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_A - \vec{v}_B| = \left|\frac{\vec{p}_A}{E_A} - \frac{\vec{p}_B}{E_B}\right| = \frac{2|\vec{p}_1|}{E_1} = 4\frac{|\vec{p}_1|}{E_{CM}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\substack{CMS\\ m_1=m_2=m_3=m_4}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2}}$$

V.6 Berechnung von S-Matrixelementen

$|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_{in}$: Heisenberg-Zustand, der zur Zeit $t\to-\infty$ zwei separierte Teilchen mit Impulsen $\vec{k}_A$ und $\vec{k}_B$ beschreibt.

$\Rightarrow$ z.B. Gesamtimpuls: $\lim\limits_{\tau\to\infty} \hat{\vec{P}}(-\tau)\,|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_{in} = (\vec{k}_A+\vec{k}_B)\,|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_{in}$

analoge Zustände zur Referenzzeit t_0:

$$\hat{\vec{P}}(t_0)\,|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle = (\vec{k}_A+\vec{k}_B)\,|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle$$

$$\hat{\vec{P}}(t_0) = e^{iH(t_0-t)}\,\hat{\vec{P}}(t)\,e^{-iH(t_0-t)}$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{P}}(t)\,e^{-iH(t_0-t)}|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle = (\vec{k}_A+\vec{k}_B)\,e^{-iH(t_0-t)}|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle$$

$$\overset{t\to-\infty}{\Rightarrow} \lim_{\tau\to\infty}\hat{\vec{P}}(-\tau)\,e^{-iH(t_0+\tau)}|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle = (\vec{k}_A+\vec{k}_B)\lim_{\tau\to\infty}e^{-iH(t_0+\tau)}|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle$$

$$\Leftrightarrow |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_{in} = \lim_{\tau\to\infty} e^{-iH(t_0+\tau)}\,|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle\, e^{i\varphi_{in}}$$

(φ_{in}: zunächst beliebige Phase)

analog:

$$|\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n\rangle_{out} = \lim_{\tau\to\infty} e^{-iH(t_0-\tau)}\,|\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n\rangle\, e^{i\varphi_{out}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &{}_{out}\langle \vec p_1 \ldots \vec p_n | \vec k_A \vec k_B \rangle_{in} = \langle \vec p_1 \ldots \vec p_n | S | \vec k_A \vec k_B \rangle \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \langle \vec p_1 \ldots \vec p_n | e^{-2iH\tau} | \vec k_A \vec k_B \rangle \, e^{i(\varphi_{in}-\varphi_{out})} \end{aligned}}$$

Phasenfaktor:

- steht nicht in Peskin / Schroeder
- irrelevant für $d\sigma \sim |M|^2$
- $S \doteq \mathbb{1}$ für $H_{ww} = 0$

  $\Rightarrow$ z.B. $\varphi_{in} = (E_A+E_B)(t_0+\tau)$, $\varphi_{out} = (E_1+\ldots+E_n)(t_0-\tau)$

Auswertung des Matrixelements:

Problem: Wir wissen nicht, wie die wechselwirkenden Zustände aussehen

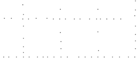
Vakuum: $|\Omega\rangle = \lim\limits_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty} \left(e^{-iE_0\tau}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1} e^{-iH\tau}|0\rangle$

Annahme:

Ähnlich gilt $|\vec k_A \vec k_B\rangle \sim \lim\limits_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty} e^{-iH\tau} \underbrace{|\vec k_A \vec k_B\rangle_0}_{=\sqrt{2E_A 2E_B}\, a_A^\dagger a_B^\dagger |0\rangle}$

- im Wesentlichen richtig, aber Beweis nicht-trivial

- grundsätzliche Schwierigkeit:

  Selbst asymptotisch unterliegen die Teilchen noch Selbstwechselwirkungen, z.B.  , 

$$\rightsquigarrow \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | S | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle$$

$$\sim \lim_{\tau \to (1-i\epsilon)\infty} {}_0\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | e^{-2iH\tau} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0 \, e^{i(E_A+E_B)(t_0+\tau)} \times e^{-i(E_1+\dots E_n)(t_0-\tau)}$$

$$= \lim_{\tau \to (1-i\epsilon)\infty} {}_0\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | \underbrace{e^{-iH_0(t_0-\tau)} e^{-2iH\tau} e^{iH_0(t_0+\tau)}}_{U(\tau,-\tau)} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0 \qquad \text{(vgl. S. V-9)}$$

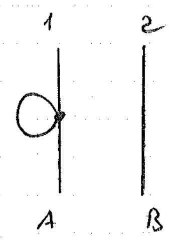
$$= \lim_{\tau \to (1-i\epsilon)\infty} {}_0\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | T\left\{ \exp\left(-i \int_{-\tau}^{\tau} dt\, H_I(t)\right)\right\} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0$$

Man kann zeigen, dass sich durch Berücksichtigung des Proportionalitätsfaktors wieder viele Diagramme herauskürzen

2)
$$\boxed{\begin{aligned} &\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | iT | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle \\ &= \lim_{\tau \to (1-i\epsilon)\infty} \left({}_0\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | T\left\{ \exp\left(-i \int_{-\tau}^{\tau} dt\, H_I(t)\right)\right\} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0 \right)_{\substack{\text{verbunden,} \\ \text{amputiert}}} \end{aligned}}$$

- „Verbunden" heißt hier (im Unterschied zu S. V-20): Alle externen Linien müssen mit einander verbunden sein.

Bsp.:



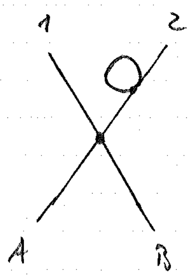
ist nicht verbunden

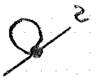
Viererimpulserh. an den Vertizes

$\Rightarrow p_1 = p_A, \; p_2 = p_B \quad \Rightarrow$ trägt nur zur $\mathbb{1}$ von $S = \mathbb{1} + iT$ bei, nicht zu T

• „Amputiert":

Betrachte z.B.



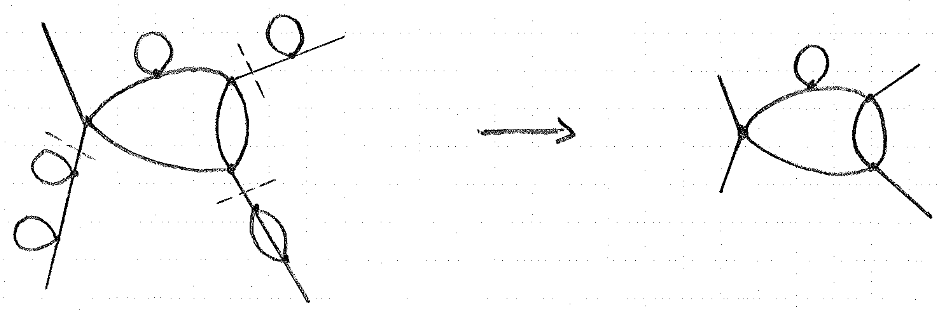
Der Loop  beschreibt eine Selbstwechselwirkung des auslaufenden Teilchens 2.

→ hat nichts mit dem Streuprozess zu tun und wird durch den Proportionalitätsfaktor beim Übergang $|\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n\rangle \to |\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n\rangle_0$ weggekürzt.

⇒ allgemein:

Gehe von jeder äußeren Linie aus nach innen und entferne die äußeren Diagrammteile, die durch den Schnitt einer einzigen Linie vom restlichen Diagramm getrennt werden können.

Bsp:

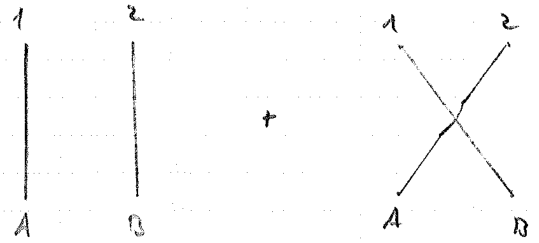


<u>Beispiel.</u>

Störungsentwicklung von ${}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T\{\exp(-i\int dt\, H_I(t))\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0$ in ϕ^4-Theorie

<u>0. Ordnung:</u>

$$ {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 = 4\sqrt{E_1 E_2 E_A E_B}\, \langle 0 | a_1 a_2 a_A^\dagger a_B^\dagger | 0 \rangle $$
$$ = 4 E_A E_B (2\pi)^6 \{ \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_A)\, \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{p}_B) + \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_B)\, \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{p}_A) \} $$

$\hat{=}$ 

nicht verbunden $\rightarrow$ kein Beitrag zu T

<u>1. Ordnung:</u>

$$ {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T\left(-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\, \phi_I^4(x)\right) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 $$
$$ = {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N\left\{-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\, \phi_I^4(x) + \text{Kontraktionen}\right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 $$

Beachte: äußere Zustände $\neq |0\rangle$

$\Rightarrow$ Beiträge unkontrahierter Operatoren verschwinden nicht automatisch

$$ \phi_I = \phi_I^{(+)} + \phi_I^{(-)}, \quad N \rightsquigarrow {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi_I^{(-)} \dots \phi_I^{(+)} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 $$

$$ \phi_I^{(+)}(x) | \vec{p} \rangle_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}}\, a_{\vec{k}}\, e^{-ik\cdot x} \sqrt{2E_p}\, a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = e^{-ip\cdot x} |0\rangle $$

$$ {}_0\langle \vec{p} | \phi_I^{(-)}(x) = \langle 0 | e^{ip\cdot x} $$

2) Definiere Kontraktionen mit Zuständen:

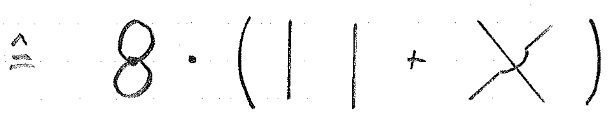
$$\phi_I(x)\,|\vec{p}\rangle_0 = e^{-ip\cdot x}|0\rangle \quad , \quad {}_0\langle\vec{p}\,|\,\phi_I(x) = \langle 0|\,e^{ip\cdot x}$$

→ nichtverschwindende Erwartungswerte
= vollständige Kontraktionen von Operatoren <u>und</u> Zuständen

unser Beispiel:

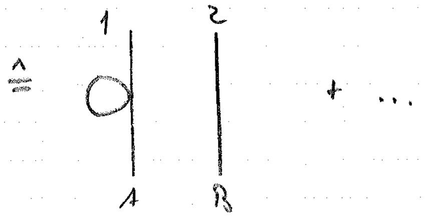
$$T\phi^4 = N(\underset{A}{\phi\phi\phi\phi} + 12\,\underset{B}{\phi\phi\phi\phi} + 3\,\underset{C}{\phi\phi\phi\phi})$$

$C \leadsto {}_0\langle\vec{p}_1\vec{p}_2|\phi\phi\;\phi\phi|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0 + (\vec{p}_A \leftrightarrow \vec{p}_B)$



kein Beitrag zu T

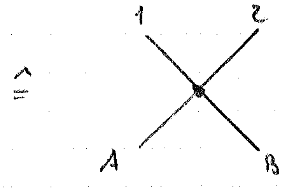
$B \leadsto {}_0\langle\vec{p}_1\vec{p}_2|\phi\phi\;\phi\phi|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0 + \dots$



" " " T
(nicht vollst. verbunden)

⇒ Nur A trägt zu T bei:

${}_0\langle\vec{p}_1\vec{p}_2|\phi\phi\phi\phi|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0$ $\hat{=}$



$$\leadsto 4!\left(-i\frac{\lambda}{4!}\right)\int d^4x\; e^{-i(p_A+p_B-p_1-p_2)\cdot x}$$

$$= -i\lambda\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_A+p_B-p_1-p_2) = i\mathcal{M}\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_A+p_B-p_1-p_2)$$

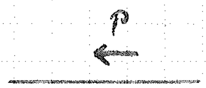
$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{M} = -\lambda}}$$ (in 1. Ordnung Störungstheorie)

Feynman-Regeln für die invariante Amplitude

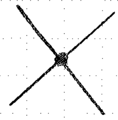
(ϕ^4-Theorie, Impulsraum)

$i\mathcal{M} = \sum$ verbundene amputierte Diagramme

mit

1.) Propagator:  $\hat{=} \; \dfrac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$ (interne Linien)

2.) externe Linien:  $\hat{=} \; 1$

3.) Vertex:  $\hat{=} \; -i\lambda$

4.) Viererimpulserh. an jedem Vertex

5.) Integriere über alle unbestimmten Impulse

6.) Teile durch Symmetriefaktor

V. 7 Feynman-Regeln für Fermionen

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(\underbrace{a_{\vec p}^s\, u^s(\vec p)\, e^{-ip\cdot x}}_{\psi^{(+)}} + \underbrace{b_{\vec p}^{s\dagger}\, v^s(\vec p)\, e^{ip\cdot x}}_{\psi^{(-)}} \right)$$

$$\bar\psi(x) = \quad \underbrace{a^\dagger\, \bar u\, e^{ip\cdot x}}_{\bar\psi^{(-)}} \qquad \underbrace{b\, \bar v\, e^{-ip\cdot x}}_{\bar\psi^{(+)}}$$

Hauptunterschied zu Bosonen:
Minuszeichen bei Vertauschungen

- <u>zeitgeordnetes Produkt:</u>

$$T\{\psi(x)\,\bar\psi(y)\} = \begin{cases} \psi(x)\,\bar\psi(y) & \text{für } x^0 > y^0 \\ -\bar\psi(y)\,\psi(x) & \text{"} \;\; y^0 > x^0 \end{cases}$$

(wie gehabt)

$T\{\psi\psi\}$, $T\{\bar\psi\bar\psi\}$, mehr Felder analog

- <u>Normalordnung:</u> ebenfalls Minuszeichen bei Vertauschungen

z.B. $N(a_{\vec p}\, a^\dagger_{\vec q}) = -a^\dagger_{\vec q}\, a_{\vec p}$

$$N(a_{\vec p}\, a_{\vec q}\, a^\dagger_{\vec r}) = (-1)^2\, a^\dagger_{\vec r}\, a_{\vec p}\, a_{\vec q} = (-1)^3\, a^\dagger_{\vec r}\, a_{\vec q}\, a_{\vec p}$$

- <u>Kontraktionen:</u>

$$\overbracket{\psi(x)\,\bar\psi(y)} := \left\{ \begin{array}{ll} \{\psi^{(+)}(x), \bar\psi^{(-)}(y)\} & \text{für } x^0 > y^0 \\ -\{\bar\psi^{(+)}(y), \psi^{(-)}(x)\} & \text{"} \;\; y^0 > x^0 \end{array} \right\} = S_F(x-y)$$

$$\overbracket{\psi(x)\,\psi(y)} = \overbracket{\bar\psi(x)\,\bar\psi(y)} = 0$$

$$\overbracket{\bar\psi(x)\,\psi(y)} = -\overbracket{\psi(y)\,\bar\psi(x)} = -S_F(y-x)$$

2, Fermion-Propagatoren haben eine „Richtung" (vom $\bar\psi$ zum ψ):

$$S_F(x-y) = \underset{x}{\bullet}\!\longleftarrow\!\underset{y}{\bullet}$$

- mehrere Operatoren:

$$N(\psi_1\,\psi_2\,\bar\psi_3\,\bar\psi_4) = -\overbracket{\psi_1\,\bar\psi_3}\, N(\psi_2\,\bar\psi_4)$$

- <u>Wick'sches Theorem:</u>

(mit den obigen Definitionen wie gehabt)

$$T[\psi_1 \bar\psi_2 \psi_3 \dots] = N[\psi_1 \bar\psi_2 \psi_3 \dots + \text{alle mgl. Kontr.}]$$

$$\left(\Rightarrow \langle 0 | T(\psi(x) \bar\psi(y)) | 0 \rangle = \langle 0 | \overbracket{\psi(x) \bar\psi(y)} | 0 \rangle = S_F(x-y) \langle 0 | 0 \rangle \right)$$

- <u>Kontraktion mit Zuständen:</u>

$$\overbracket{\psi(x) \, | \vec p, s \rangle}_a = \overbracket{\psi(x) \sqrt{2E_p} \, a_{\vec p}^{s\dagger}} | 0 \rangle = u^s(\vec p) \, e^{-ip\cdot x} | 0 \rangle$$

$$_b\overbracket{\langle \vec p, s | \psi(x)} = \langle 0 | v^s(\vec p) \, e^{ip\cdot x}$$

und analog für $\bar\psi$

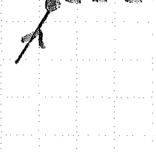
$\Rightarrow$ externe Linien in T-Matrix-Elementen:

- einlaufendes Fermion $\quad \dots \xleftarrow[p]{} \; = u^s(\vec p)$
- auslaufendes " $\quad \xleftarrow[p]{} \dots \; = \bar u^s(\vec p)$
- einl. Anti-Fermion $\quad \dots \xrightarrow[\leftarrow p]{} \; = \bar v^s(\vec p)$
- ausl. " $\quad \xrightarrow[\leftarrow p]{} \dots \; = v^s(\vec p)$

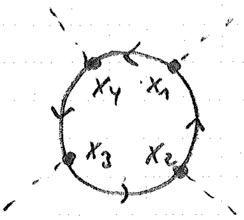
- einfachste WW mit skalarem Feld ϕ:

$$\mathcal{L}_{WW} = -g \, \bar\psi(x) \psi(x) \phi(x) \qquad \text{(Yukawa-Theorie)}$$

Quantisierungsregel: ψ und ϕ vertauschen

Vertizes:  $\hat{=} \; -ig \qquad (\to \text{Übung})$

geschlossener Fermion - Loop: (a, b, c, d : Spinor - Indizes)



$$\sim \quad \bar{\psi}_a(x_1)\,\psi_a(x_1)\,\bar{\psi}_b(x_2)\,\psi_b(x_2)\,\bar{\psi}_c(x_3)\,\psi_c(x_3)\,\bar{\psi}_d(x_4)\,\psi_d(x_4)$$

$$= - S_{F_{da}}(x_4 - x_1)\, S_{F_{ab}}(x_1 - x_2)\, S_{F_{bc}}(x_2 - x_3)\, S_{F_{cd}}(x_3 - x_4)$$

$$= - \operatorname{tr}\left[S_F(x_4 - x_1)\, S_F(x_1 - x_2)\, S_F(x_2 - x_3)\, S_F(x_3 - x_4) \right]$$

2) allgemeine Regel für geschlossene Fermion - Loops
- Spur im Dirac - Raum
- zusätzliches Minus - Zeichen

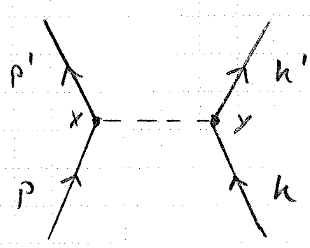
- Sei $|\vec{p}, \vec{k}\rangle \sim a^\dagger_{\vec{p}}\, a^\dagger_{\vec{k}}\, |0\rangle$

$$\Rightarrow \psi(x)\,\psi(y)\,|\vec{p}, \vec{k}\rangle \sim \psi(x)\,\psi(y)\,a^\dagger_{\vec{p}}\,a^\dagger_{\vec{k}}\,|0\rangle = \left(\psi(x)\,|\vec{k}\rangle\right)\left(\psi(y)\,|\vec{p}\rangle\right)$$

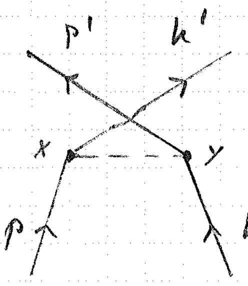
$$\psi(x)\,\psi(y)\,|\vec{p}, \vec{k}\rangle \sim -\psi(x)\,\psi(y)\,a^\dagger_{\vec{k}}\,a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle = -\left(\psi(x)\,|\vec{p}\rangle\right)\left(\psi(y)\,|\vec{k}\rangle\right)$$

und analog für auslaufende Teilchen

Konsequenz:
zusätzliches relatives Minuszeichen zwischen den Diagrammen



und



V.8 Feynman-Regeln der QED

Lagrange-Dichte der QED:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi A_\mu$$

$\downarrow$ Elektron-Propagator $\quad\downarrow$ Photon-Prop. $\quad\downarrow$ Elektron-Photon-WW

(1) Elektron-Propagator $\xleftarrow{\;p\;}$ $= i\,\dfrac{p\!\!\!/ + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$

(2) Photon-Propagator $\mu \underset{q}{\sim\!\sim\!\sim} \nu$ $= \dfrac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}$

(3) externe Fermion-Linien:
- $u^s(\vec{p})$ für einlaufende e^- mit Impuls $\vec{p}$ und Spin s
- $\bar{u}^s(\vec{p})$ " auslaufende " " " " " " "
- $\bar{v}^s(\vec{p})$ " einlaufende e^+ " " " " " "
- $v^s(\vec{p})$ " auslaufende " " " " " " "

(4) externe Photon-Linien:
- $\varepsilon_\lambda(\vec{p})$ für einlaufende γ mit Impuls $\vec{p}$ und Pol. λ
- $\varepsilon_\lambda^*(\vec{p})$ " auslaufende " " " " " "

(5) Elektron-Photon-Vertex: μ $= -ie\gamma^\mu$

(6) Viererimpulserhaltung an jedem Vertex

(7) Integration über alle unbestimmten Impulse

(8) Spur und Extra-Minuszeichen für geschlossene Fermion-Loops

(9) Rel. Minuszeichen beim Austausch zweier externer Fermionen