Klassische Mechanik

Prof. Dr. J. Wambach

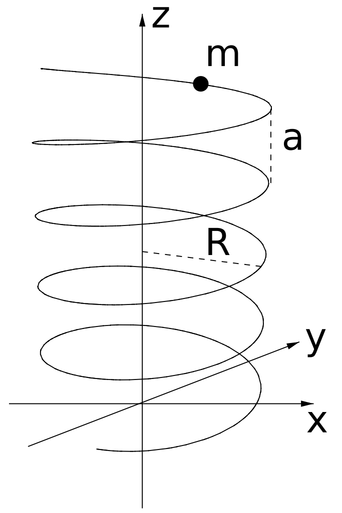
M.Sc. P. Scior
M.Sc. J. Weyrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2014/15
Übungsblatt 8 — 4. Dezember 2014

Aufgabe P17: Spiralbahn

Eine Perle als Massenpunkt mit Masse m bewegt sich reibungsfrei auf einer Schraubenlinie mit Radius R, deren Symmetrieachse die z-Achse sei. Nach einer vollen Umdrehung um die z-Achse unterscheide sich der z-Wert des Massenpunkts um a. Die Schwerkraft wirkt in negativer z-Richtung.



a) Geben Sie die Zwangsbedingungen $f_i(\rho,\varphi,z)$ an. Wieviele Zwangsbedingungen gibt es?

b) Geben Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art an.
Hinweis: Gradient in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

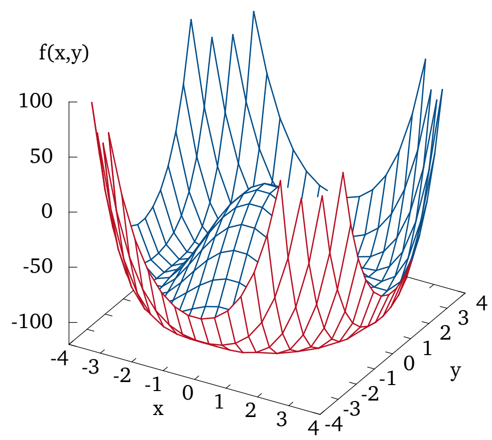
c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für den Fall, dass die Perle am Anfang an der Stelle $\vec{x}(0) = R\vec{e}_x$ ruht.

d) Berechnen Sie die Zwangskräfte.

Aufgabe P18: Lagrange-Multiplikatoren

Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = -20(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2 \quad \text{(siehe Graph).}$$



a) Berechnen Sie die Extrema von $f(x,y)$. Sind dies Maxima oder Minima?

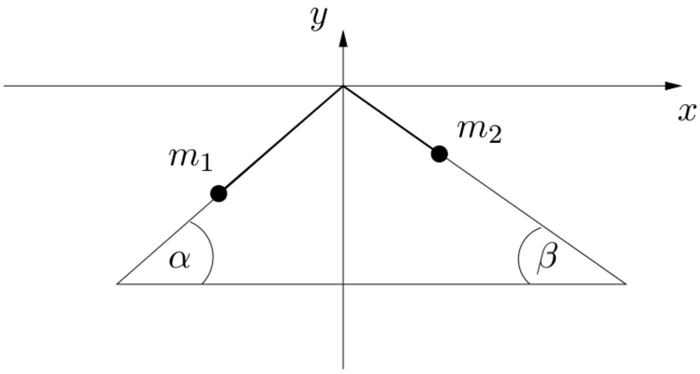
b) Nehmen Sie nun an, dass eine Nebenbedingung $y = x$ gefordert wird. Berechnen Sie die Ableitungen der Funktion

$$\tilde{f}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(y-x)$$

in den Koordinaten (x,y,λ). Welche Extrema von $f(x,y)$ sind auch Extrema von $\tilde{f}(x,y,\lambda)$?

Aufgabe H9: Doppelte schiefe Ebene (2+4+2+2 Punkte)

Wir betrachten zwei Punktmassen mit Massen m_1 und m_2, auf die nur die Gewichtskraft und Zwangskräfte wirken. Die Punktmassen befinden sich auf einer doppelten schiefen Ebene und sind durch ein (masseloses) Seil der Länge L verbunden.



a) Bestimmen Sie die Zwangsbedingungen $f_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, $i = 1, \dots k$. Wieviele Zwangsbedingungen gibt es?

b) Stelle Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf und lösen Sie diese.

c) Bestimmen Sie die Zwangskräfte

$$\vec{Z}_j = m_j \ddot{\vec{x}}_j - \vec{F}_j, \quad j = 1, 2.$$

d) Die Zwangskräfte hängen mit den Gradienten der Zwangsbedingungen wie folgt zusammen

$$\vec{Z}_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{\nabla}_j f_i.$$

Bestimmen Sie die Lagrange-Multiplikatoren durch Koeffizientenvergleich mit c).