Klassische Mechanik

Prof. Dr. J. Wambach

M.Sc. P. Scior
M.Sc. J. Weyrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2014/15
Übungsblatt 5 — 13. November 2014

Aufgabe P10: Streuung harter Kugeln

Ein anschauliches Beispiel für das Streuproblem ist die Streuung zweier Billard-Kugeln mit Radius R. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass sich die Kugeln beim Stoß nicht verformen (harte Kugeln). Diese Situation kann durch ein Potential dargestellt werden, welches eine unendlich Stufe beim Abstand $r_{\min} = 2R$ aufweist:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r \geq 2R \\ \infty & \text{für} \quad r < 2R \end{cases}$$

a) In der Vorlesung wurde der Streuwinkel in Abhängigkeit vom Stoßparameter hergeleitet:

$$\theta(b) = \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} dr \frac{1}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}}}$$

Bestimmen Sie den Streuwinkel θ für das Potential der Streuung harter Kugeln. Hinweis: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

b) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|.$$

Hinweis: $\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

c) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe P11: Kegel

Wir betrachten einen Kegel mit homogener Massenverteilung, Höhe h und Radius R.

a) Bestimmen Sie das Volumen des Kegels.

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment für die Rotation des Kegels um seine Symmetrieachse.

c) Der Schwerpunkt eines Körpers mit Massendichte $\rho(\vec{x})$ ist durch den Vektor

$$\vec{R}_s = \frac{\int dV \rho(\vec{x}) \vec{x}}{\int dV \rho(\vec{x})}$$

gegeben. Berechnen Sie den Schwerpunkt des Kegels. Die Grundfläche des Kegels liege in der xy-Ebene.

Aufgabe P12: Drehimpuls für symmetrische Körper

Ein starrer Körper mit zylindersymmetrischer Massenverteilung rotiere um seine Symmetrieachse ($\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$). Zeigen Sie ausgehend von der Definition des Drehimpulses,

$$\vec{L} = \sum_i \vec{x}^{(i)} \times \vec{p}^{(i)},$$

dass der Drehimpuls in die Richtung der Drehachse zeigt.

Aufgabe H5: Trägheitsmomente (2+2 Punkte)

Berechnen Sie die Trägheitsmomente für die Rotation um die Symmetrieachsen folgender Körper:

a) Ein homogener Hohlzylinder mit Masse M, Radius R, innerem Radius R_i und Höhe h

b) Eine Kugelschale mit Masse M, Radius R und Dicke $d \ll R$. Entwickeln Sie dazu Volumen und Trägheitsmoment der Kugelschale für kleine d und berücksichtigen Sie nur Terme in führender Ordnung.
Hinweis: Verwenden Sie Kugelkoordinaten, $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

Aufgabe H6: Wettrennen (2+2+2 Punkte)

Ein Vollzylinder und ein Hohlzylinder $\left(\text{innerer Radius } R_i = \frac{1}{2}R\right)$ mit gleichen Massen M und Radien R rollen auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α. Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Körper kann dann als Summe aus Schwerpunktsvektor $\vec{P}(t) = \vec{P}(0) + \vec{s}(t)$ und Relativvektor $\vec{r}^{(i)}(t)$ geschrieben werden

$$\vec{x}^{(i)}(t) = \vec{P}(t) + \vec{r}^{(i)}(t). \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\vec{x}}^{(i)}(t))^2$ eines Zylinders mit Hilfe von Gl. (1). Zeigen Sie, dass die kinetische Energie aus einem reinen Translationsanteil und einem reinen Rotationsanteil besteht.

b) Stellen Sie mit der Hilfe der Gesamtenergie die Bewegungsgleichung für die zurückgelegte Strecke s eines Körpers mit Trägheitsmoment J auf, der die schiefe Ebene herunterrollt und geben Sie deren Lösung an, wobei die Anfangsbedingungen $s(t=0) = \dot{s}(t=0) = 0$ gelten.

c) Welcher der beiden Körper erreicht bei einem gleichzeitigen Start am schnellsten das untere Ende der Ebene? Nutzen Sie die Trägheitsmomente aus Aufgabe H5a).