Klassische Mechanik

Prof. Dr. J. Wambach

M.Sc. P. Scior
M.Sc. J. Weyrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2014/15
Übungsblatt 4 — 6. November 2014

Aufgabe P8: Zweites Keplersches Gesetz

Das zweite Keplersche Gesetz besagt, dass ein Planet im Sonnensystem in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht.

a) Leiten Sie die differentielle Form

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2m} \tag{1}$$

des zweiten Keplerschen Gesetzes her. A bezeichnet hier die überstrichene Fläche, m die Masse des Planeten und l den Drehimpuls.

b) Welcher Zusammenhang besteht zur Drehimpulserhaltung?

Aufgabe P9: Streuung am Zentralpotential

Wir betrachten die Streuung an einem Zentralpotential $V(r)$.

a) Welche Erhaltungsgrößen hat das System?

b) Wie ist der Zusammenhang zwischen dem Stoßparameter b und den Erhaltungsgrößen für ein einlaufendes Teilchen ($t \to -\infty$)?

Aus der Behandlung des Keplerproblems kennen wir folgende Formel

$$\Delta\varphi = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \mathrm{d}r \frac{1}{r^2\sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}}}. \tag{2}$$

c) Zeigen sie mit Hilfe von Gl.(2) die folgende Identität für $\vartheta(b)$, den Streuwinkel in Abhängigkeit des Stoßparameters

$$\vartheta(b) = \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \mathrm{d}r \frac{1}{r^2\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}. \tag{3}$$

d) Bestimmen Sie die Bedingung für den *Punkt des geringsten Abstands* $r_{\min}$ und drücken sie $r_{\min}$ für $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$ durch die Erhaltungsgrößen aus a) und den Stoßparameter b aus.

e) Zeigen Sie nun, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b}{\sin(\vartheta)}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\vartheta}\right|. \tag{4}$$

für das Potential $V(r) = -\frac{\kappa}{r}$ durch die Rutherfordsche Streuformel

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4}\left(\frac{\kappa}{2E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}} \tag{5}$$

gegeben ist.

Hinweis: $\int du \frac{1}{\sqrt{au^2+bu+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{2au+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$, *für* $a < 0,\ b^2 - 4ac > 0$

Aufgabe H4: Coulomb- vs. Yukawa-Potential (5+5 Punkte)

Wir betrachten zunächst Streuung am Coulomb Potential

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}\,, \quad \kappa = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\,. \tag{6}$$

a) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt durch Raumwinkelintegration des differentiellen Wirkungsquerschnittes (vgl. P9). Was stellen Sie fest?

   Welche Eigenschaft des Streupotentials ist hierfür verantwortlich?

Betrachten wir nun eine modifizierte Version des Coulomb-Potentials, das sogenannte *Yukawa-Potential*

$$V(r) = \frac{V_0}{r} e^{-\alpha r}, \quad \alpha > 0\,, \quad V_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \tag{7}$$

lässt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt für niedere Energien $E \sim k^2$ durch folgende Formel nähern

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{V_0}{4k^2 \sin^2(\frac{\vartheta}{2}) + \alpha^2} \right)^2 . \tag{8}$$

b) Berechnen Sie wieder den totalen Wirkungsquerschnitt. Was stellen Sie nun fest? Erklären Sie die Wirkung der Modifikation im *Yukawa-Potential* indem sie den Grenzfall $\alpha \to 0$ betrachten.